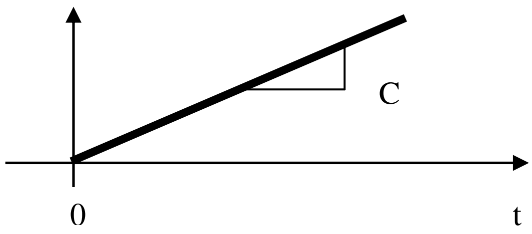
CONSIDERAŢII TEORETICE_4

Anexa 1

- **Funcţia rampă**



Obs.: C este o constantă reală.

- Transformata Laplace a funcţiei rampă este:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty Cte^{-st}dt$$

Se aplică integrarea prin părţi. Conform acestei metode de integrare:

$\int udv = uv - \int vdu$ iar ca integrală definită: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Se notează:

$$u = Ct$$

$$du = Cdt$$

$$v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$dv = e^{-st}dt$$

Prin urmare, în calculul transformatei Laplace, se obţine:

$$F(s) = \int_0^\infty Cte^{-st}dt = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu = -\frac{Ct}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty\left(-\frac{1}{s}e^{-st}C\right)dt =$$

$$= 0 + \frac{C}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{C}{s}\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{C}{s^2}$$

Transformata Laplace a funcţiei rampă este:

$$\mathcal{L}\{Ct\} = \frac{C}{s^2}$$

Anexa 2

Sistemul de ordinul 1

Ecuaţia dinamică a sistemului este de forma:

$$a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{6.11}$$

Aplicând transformata Laplace şi reorganizări successive, se obţine funcţia de transfer a unui sistem de ordinul 1:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{b_0 / a_0}{\frac{a_1}{a_0} s + 1} = \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \tag{6.12}$$

unde $S = \dfrac{b_0}{a_0}$ (6.13)

este sensibilitatea sistemului, iar

$\tau = \dfrac{a_1}{a_0}\ [s]$ (6.14)

este constanta de timp a sistemului.

Mărimea de ieşire va fi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot U(s) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot U(s) \right\} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Răspunsul sistemului de ordinul 1 la mărimea de intrare „impuls unitar” (funcţia pondere a asistemului)

Transformata Laplace a mărimii de intrare considerate este U(s) =1. Relaţia (6.15) devine în acest caz:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot 1 \right\} = S \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} \right\} = S \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6.16}$$

pentru care s-a utilizat tabela de funcţii inverse Laplace, din care s-a extras:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{k}{s + a} \right\} = k \cdot e^{-at} \tag{6.17}$$

Formele de variaţie ale mărimilor de intrare şi ieşire sunt prezentate în fig. 6.16.

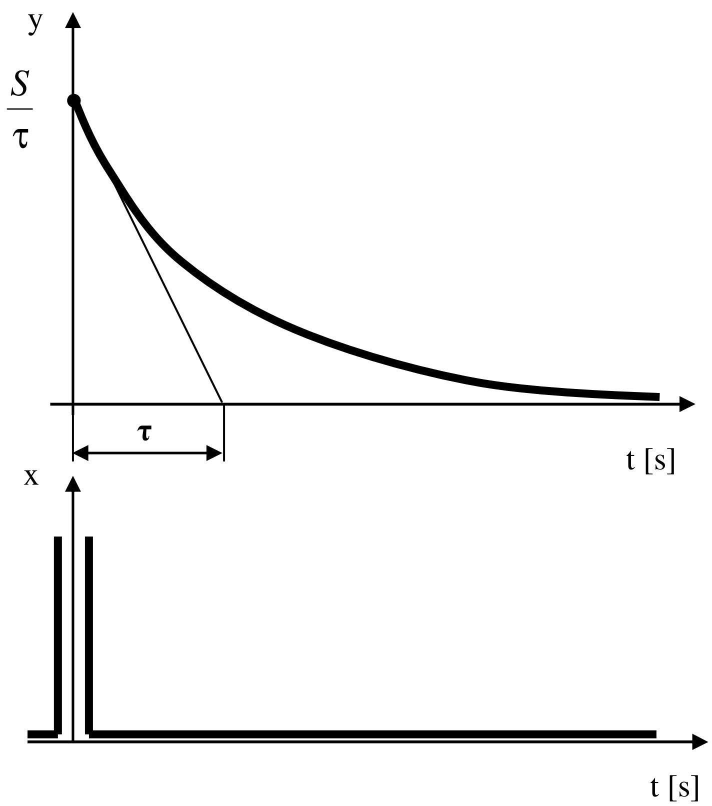


Fig. 2 Răspunsul sistemului de ordinul 1 la semnal de intrare de tip impuls unitar, cu evidenţierea sesnsibilităţii S şi a constantei de timp τ

Răspunsul sistemului de ordinul 1 la mărimea de intrare „treaptă" (răspuns indicial)

Pentru un semnal de tip treaptă, transformata Laplace este:

$$U(s) = \frac{H}{s} \tag{6.18}$$

unde H este valoarea semnalului (H = 1 defineşte semnalul treaptă unitară).

În acest caz răspunsul sistemului se determină conform următoarelor:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot \frac{H}{s}\right\} = S \cdot H \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{\tau}}{s(s + \frac{1}{\tau})}\right\} = S \cdot H \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{6.19}$$

Răspunsul sistemului la un semnal treaptă este prezentat în fig. 6.17. Se observă că valoarea de regim stabilizat (valoarea staţionară) este:

$$y_{st} = S \cdot H \tag{6.20}$$

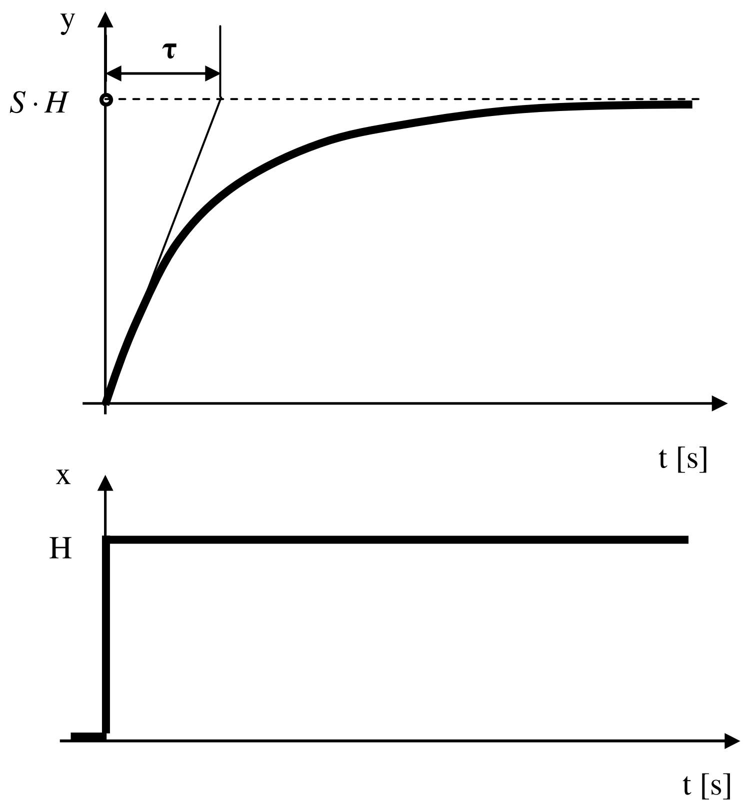


Fig. 3 Răspunsul sistemului de ordinul 1 la un semnal de intrare de tip treaptă, cu evidenţierea valorii de regim staţionar şi a constantei de timp a sistemului

Se consideră ca acceptabilă, atingerea valorii de ieşire de .95 x y_{st} în zona domeniului de câmp staţionar dupa 3 constante de timp. Valoarea acceptată de .95 din cea de regim staţionar depinde de aplicatie.