

## 7. ANALIZA SISTEMELOR IN DOMENIUL FRECVENȚEI

### 7.1. Introducere

Am prezentat în capitolele precedente studiul comportării unui sistem liniar în regim tranzitoriu. Analiza s-a bazat pe rezolvarea ecuațiilor diferențiale. Indiferent de metoda folosită, analiza în domeniul timp devine dificilă, greoaie cu cât sistemul este mai complex. Acest lucru este cu atât mai evident la analiza experimentală a sistemelor.

Pentru învingerea acestor neajunsuri se recomandă analiza sistemelor în domeniul frecvență. Această metodă se bazează pe transformata Fourier și are în vedere modul de reacție a sistemului (în regim staționar), pentru o variație sinusoidală a mărimii de intrare, a cărei frecvență variază într-un anumit domeniu.

### 7.2. Caracteristici de frecvență

#### 7.2.1. Introducere

Dacă unui element sau sistem automat  $i$  se aplică la intrare o mărime sinusoidală de forma:

$$i = I_m \cdot \sin \omega t \quad (7.1)$$

la ieșire se va obține tot o mărime sinusoidală, având o altă amplitudine și fiind defazată cu un unghi  $\varphi$ :

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.2)$$

Se poate arăta că mărimea de ieșire este o oscilație armonică:

- având amplitudinea atenuată sau amplificată față de cea a mărimii de intrare:

$$E_m = A(\omega) \cdot I_m \quad (7.3)$$

- este defazată față de mărimea de intrare cu unghiul:

$$\varphi = \varphi(\omega) \quad (7.4)$$

Este util să utilizăm comportarea unui sistem în domeniul timp pentru a

determina comportarea acestuia în domeniul frecvență.

Fiind dată o funcție  $f(t)$  - periodică nesinusoidală, continuă, mărginită - aceasta poate fi descompusă într-o serie Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (7.5)$$

unde:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  - pulsatie;  $a_0, a_k, b_k$  - coeficienti ai seriei Fourier.

Expresia anterioară se poate aduce după transformări sub forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.6)$$

Mărimea  $F(j\omega)$  definește transformata Fourier și are expresia:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.7)$$

Relațiile (7.6) și (7.7) permit determinarea comportării unui sistem în domeniul frecvențelor, cunoscând comportarea lui în domeniul timpului și invers.

Să ne reamintim modul de definire a transformatei Laplace pentru funcția  $f(t)$ :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t)] \quad (7.8)$$

Comparând relațiile se constată că acestea sunt identice dacă în ultima relație se înlocuiește  $s = j\omega$  ( $\sigma = 0$ ). Ca urmare, cunoscând perechile de funcții  $f(t) \therefore F(s)$  se obțin perechile de funcții  $f(t) \therefore F(j\omega)$  prin simpla înlocuire  $s = j\omega$ .

Având în vedere cele expuse anterior, pentru un sistem căruia i se cunoște funcția de transfer  $G(s)$  (determinată din ecuația diferențială prin aplicarea transformatei Laplace) se poate determina expresia acesteia în domeniul frecvenței:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \quad (7.9)$$

Mărimea  $G(j\omega)$  poartă denumirea de *răspuns la frecvență*. Reprezentarea în planul complex a extremității fazorului  $G(j\omega)$ , când  $\omega$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , poartă denumirea de *loc de transfer* (hodograful Nyquist) sau *caracteristică amplitudine - fază*.

Răspunsul la frecvență fiind o funcție de variabilă complexă, acesta se exprimă în funcție de modulul, defazajul, partea reală și partea imaginară. Astfel:

$$G(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) \quad (7.10)$$

unde:

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} > 0 \tag{7.11}$$

reprezentată în planul  $Y$ :  $\omega$  poartă denumirea de caracteristică *modul - frecvență* (*caracteristică amplitudine - frecvență*). Funcțiile  $U(\omega)$  și  $V(\omega)$  reprezentate în planul  $U$ :  $\omega$  și respectiv  $V$ :  $\omega$  poartă de numirea de *caracteristică reală - frecvență* și respectiv *caracteristică imaginară - frecvență*. Funcția  $\varphi = \varphi(\omega)$  reprezentată în planul  $\varphi$ :  $\omega$  poartă numele de *caracteristică fază - frecvență*.

În figura 7.1 este reprezentată caracteristica amplitudine - fază pentru un răspuns a sistemului conform cu (7.9). Reprezentarea are la bază sistemul de coordonate din figura 7.1a.. Un punct oarecare de pe caracteristică este caracterizat de modulul  $|G(\omega)|$  și faza  $\varphi(\omega)$ . Pentru utilizarea caracteristicii este necesar ca pe aceasta să fie precizate valorile frecvențelor fiecărui punct  $(0, \omega_1, \omega_2, \dots, \pm \infty)$ .

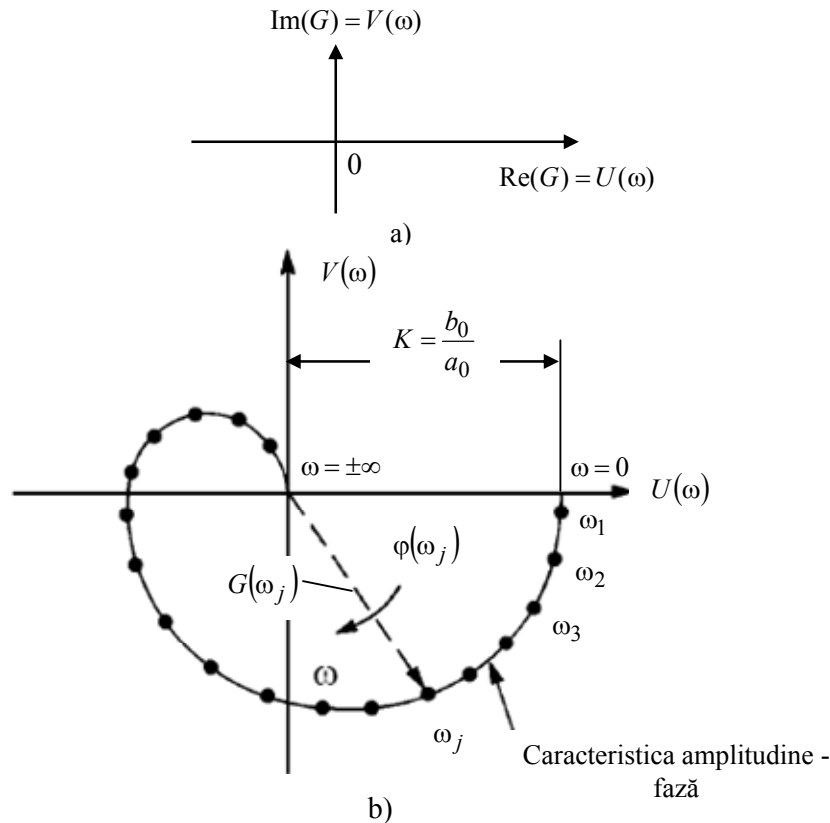


Fig. 7.1 Caracteristica amplitudine - fază

Caracteristicile de frecvență precizate în paragraful anterior sunt reprezentate principal în figura 7.2.

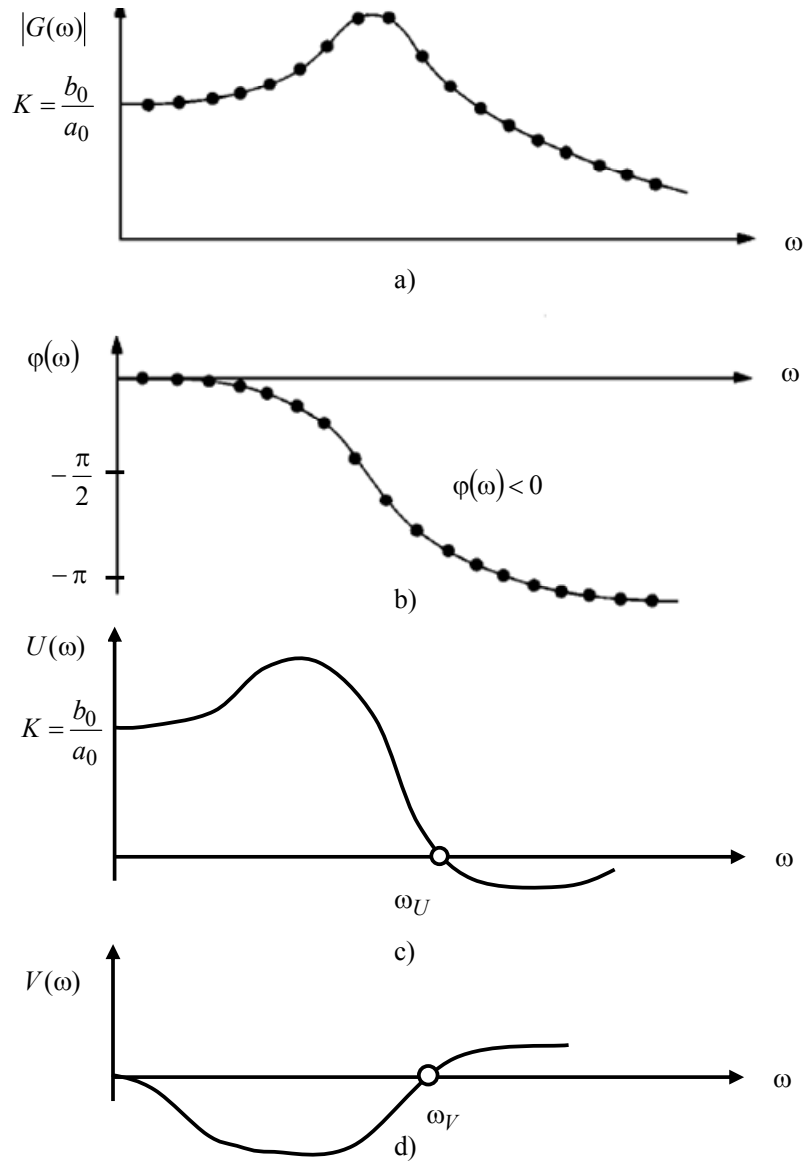


Fig. 7.2 Caracteristicile de frecvență

### 7.2.2. Construcția caracteristicilor de frecvență

Deoarece în expresia (7.11) funcția  $U(\omega)$  este o funcție pară (conține termenii cu exponentul par, pentru că  $j^2 = -1$ ), iar funcția  $V(\omega)$  este impară, se poate scrie:

$$\begin{aligned} U(-\omega) &= U(\omega) \\ V(-\omega) &= -V(\omega) \end{aligned} \quad (7.12)$$

ceea ce înseamnă că locul de transfer este o curbă simetrică în raport cu axa mărimilor reale. Din acest motiv, la construirea locului de transfer este suficient să se traseze numai partea corespunzătoare variației variabilei  $\omega$  de la zero la plus infinit. A doua ramură corespunzătoare variației variabilei  $\omega$  de la minus infinit la zero, reprezintă imaginea în oglindă față de axa reală a ramurii valorilor pozitive ale variabilei.

În figura 7.3 se prezintă locul de transfer pentru un sistem căruia i se cunoaște funcția de transfer. Se remarcă simetria caracteristicii, cele două zone ale variabilei și modul de creștere a acesteia. Mediul de lucru utilizat a fost Matlab:

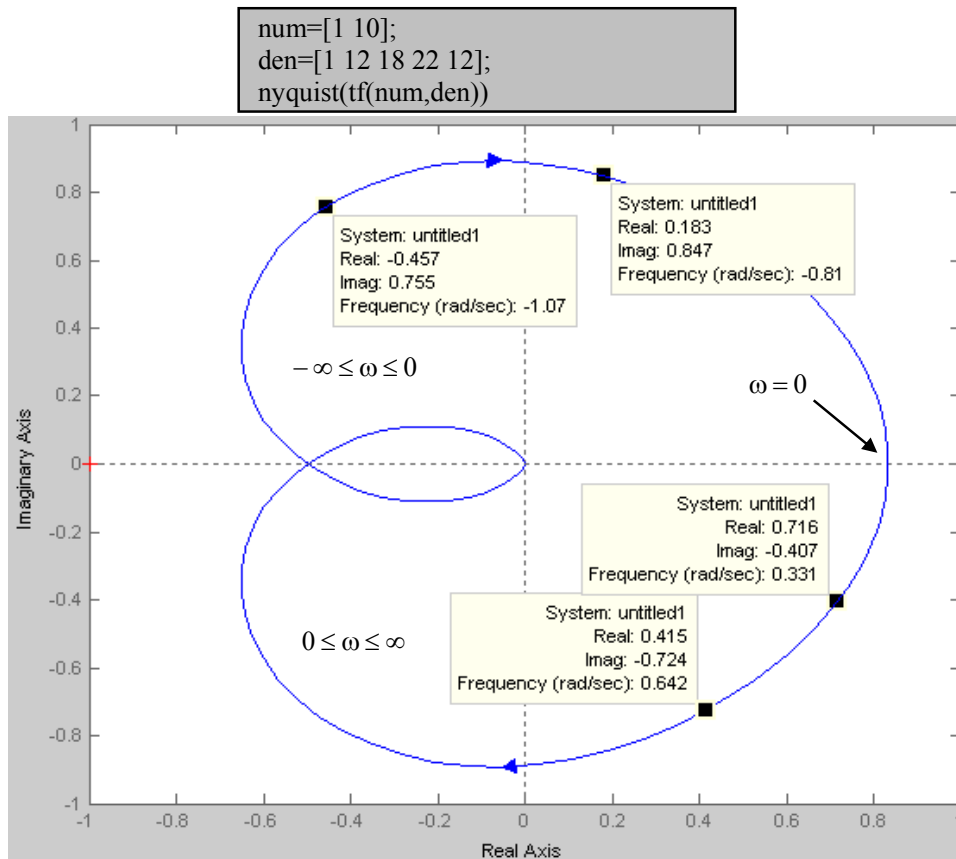


Fig. 7.3 Hodograful lui Nyquist

Caracteristicile de frecvență se reprezintă în coordonate rectangulare simple sau logaritmice. Reprezentările logaritmice au fost preluate în automatică din acustică odată cu terminologia corespunzătoare. În acustică, pentru evaluarea variației puterii  $N$  a unui semnal în raport cu o putere de referință  $N_0$  a fost definit *belul* [B] prin relația:

$$QB = \lg\left(\frac{N}{N_0}\right) \tag{7.13}$$

Din motive de reprezentare mai simplă (această unitate are valoare ridicată

1bel = lg10 adică  $N/N_0 = 10$ ) s-a admis pentru lucru *decibelul* [dB]:

$$L_{dB} = 10 \lg \left( \frac{N}{N_0} \right) \quad (7.14)$$

Dacă se consideră în analiză nu puterea semnalului, ci mărimea de care depinde aceasta, notată în general cu  $I$  (curent, tensiune, presiune, etc.) și știind că  $N \sim I^2$  și  $N_0 \sim I_0^2$  se obține relația de exprimare în decibeli:

$$L_{dB} = 20 \lg \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad (7.15)$$

*Exemplu*

Pentru a calcula raportul dintre o valoare 1kW (1000 Watt) și valoarea de 1W se folosește relația (7.14):

$$G_{dB} = 10 \lg \left( \frac{1000}{1} \right) = 10 \lg 10^3 = 10 \cdot 3 = 30 \text{ dB}$$

Pentru a calcula raportul dintre o tensiune de  $\sqrt{1000} = 31.6227$  V și o valoare de 1 V se folosește relația:

$$G_{dB} = 20 \lg \left( \frac{\sqrt{1000}}{1} \right) = 20 \lg \frac{31.6227}{1} = 20 \cdot \lg 31.6227 = 20 \cdot 1.5 = 30 \text{ dB}$$

*Caracteristica atenuare – frecvență* exprimă dependența raportului dintre amplitudinea mărimii de ieșire și cea a mărimii de intrare, funcție de pulsație:

$$A(\omega) = \frac{A_2}{A_1} = |G(j\omega)| = f_1(\omega) \quad (7.16)$$

În reprezentarea logaritmică, se consideră atenuarea în decibeli:

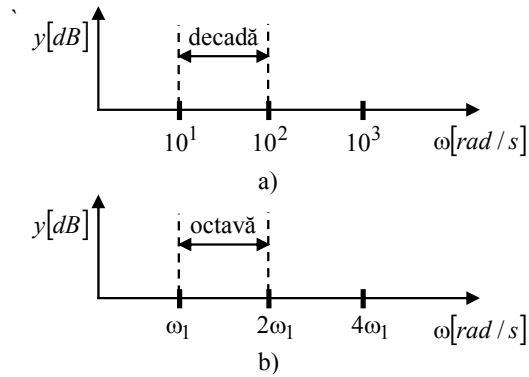
$$A_{dB} = 20 \lg A = 20 \lg \frac{A_2}{A_1} \quad (7.17)$$

În reprezentarea logaritmică a caracteristicii amplitudine – frecvență pe ordonată se ia mărimea  $A_{dB}$  iar pe abscisă se ia ( $\lg \omega$ ) dar notația se face în  $\omega$ , exprimată unitatea de măsură a lungimii segmentului, numită *decadă sau octavă*. Pe o decadă frecvența variază de 10 ori iar segmentul unei decade are lungimea (fig.7.4):

$$\lg 10\omega - \lg \omega = \lg \frac{10\omega}{\omega} = \lg 10 = 1 \quad (7.18)$$

Pe o octavă frecvența variază de la simplu la dublu astfel că segmentul unei octave are lungimea:

$$\lg 2\omega - \lg \omega = \lg \frac{2\omega}{\omega} = \lg 2 \approx 0.3 \tag{7.19}$$



**Fig. 7.4 Decada și octava**

În tabelul 7.1 se prezintă modul de exprimare în dB pentru o serie de valori uzuale.

**Tabelul 7.1**

Valoare numerică	Valoarea exprimată în dB
1/2	-6dB
1	0 dB
2	6 dB
5=10/2	20 dB – 6 dB=14 dB
10	20 dB
1000=10 <sup>3</sup>	3x20 dB = 60 dB

În unele aplicații este recomandată / utilă o reprezentare normalizată a unui parametru. De exemplu, pentru a exprima modulul unei impedanțe  $Z$  în dB, se operează o normalizare prin divizarea cu impedanță de referință (de bază) :

$$\|Z\|_{dB} = 20 \lg \left( \frac{\|Z\|}{R_0} \right) \tag{7.20}$$

Valoarea de referință este arbitrară dar se recomandă să se indice care este valoarea utilizată. De exemplu, pentru un  $\|Z\|=5\Omega$  se poate alege o valoare de referință de  $R_0 = 10\Omega$ . Valoarea în dB va fi :

$$\|Z\|_{dB} = 20 \lg \left( \frac{5\Omega}{10\Omega} \right) = -6 dB \tag{7.21}$$

Amplitudinea unei funcții exponențiale în reprezentare Bode este liniară. Să considerăm că amplitudinea unei cantități adimensionale este :

$$\|G\| = \left( \frac{f}{f_0} \right)^n \tag{7.22}$$

unde  $f_0$  și  $n$  sunt constante. Amplitudinea în reprezentare dimensională în dB va fi :

$$\|G\|_{dB} = 20 \lg \left( \frac{f}{f_0} \right)^n = 20n \lg \left( \frac{f}{f_0} \right) \quad (7.23)$$

Ecuția este reprezentată în figura 7.5 pentru diverse valori ale lui  $n$ .

Panta  $\pm 20 \text{ dB/decada}$  și  $\pm 40 \text{ dB/decada}$  a caracteristicilor logaritmice amplitudine – frecvență poate fi verificată considerând variația  $\Delta$  a amplitudinii (în dB) pentru o variație a frecvenței de o decadă, de la  $\omega_1$  la  $\omega_2$ .

Pentru cazul general  $n$ , atenuarea la o pulsație  $\omega = \omega_1$  este :

$$A_{1dB} = -20n \log(\omega_1) \quad (7.24)$$

iar la o pulsație  $\omega = \omega_2$  :

$$A_{2dB} = -20n \log(\omega_2) \quad (7.25)$$

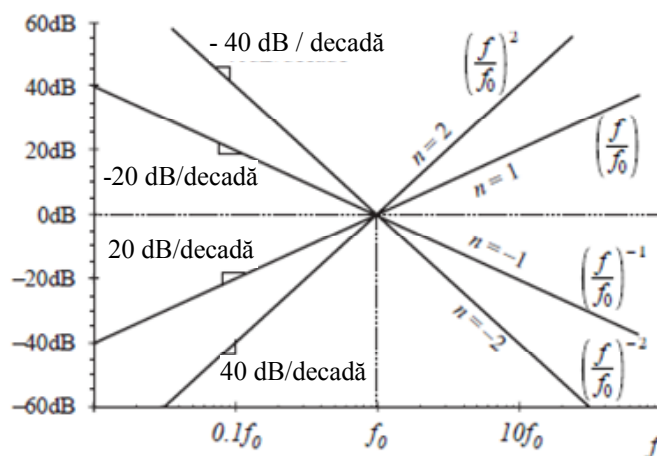


Fig. 7.5 Amplitudinea funcției exponențiale

Din relațiile anterioare se poate determina :

$$A_{2dB} - A_{1dB} = -20n[\log(\omega_2) - \log(\omega_1)] \quad (7.26)$$

Pentru  $n = 1$  se poate scrie :

$$\Delta dB = 20(\log \omega_2 - \log \omega_1) = 20 \log \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \quad (7.27)$$

și considerând  $\omega_2 = 10\omega_1$ , relația anterioară devine

$$\Delta dB = 20 \log \left( \frac{10\omega_1}{\omega_1} \right) = 20 \log(10) = 20 \text{ dB/decada} \quad (7.28)$$

Pentru  $n = 2$  se obține în mod similar panta de  $40 \text{ dB/decada}$ .



*Caracteristica fază – frecvență* exprimă dependența defazajului mărimii de ieșire față de mărimea de intrare, funcție de pulsație:

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right) = f_2(\omega) \quad (7.29)$$

În reprezentarea grafică a caracteristicii, faza se consideră în ordonată cu unitatea de măsură radiani sau în grade. În abscisă se reprezintă  $\omega$  la scară logaritmică.

În literatură caracteristicile logaritmice de frecvență menționate sunt cunoscute sub denumirea de *diagramele Bode*.

Literatura de specialitate consideră că reprezentarea logaritmică a caracteristicilor are două mari avantaje.

Să considerăm  $n$  elemente legate în serie astfel că funcția de transfer a ansamblului se poate scrie:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_n(s) \quad (7.30)$$

sau în domeniul frecvenței:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot \dots \cdot G_n(j\omega) \quad (7.31)$$

Considerând exprimările în complex:

$$G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (7.32)$$

$$G_i(j\omega) = A_i(\omega) \cdot e^{j\varphi_i(\omega)} \quad (7.33)$$

relația (7.30) devine:

$$G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \cdot e^{j\varphi_i(\omega)} = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \cdot e^{j \cdot \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)} \quad (7.34)$$

Din relația anterioară rezultă după identificare:

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \quad (7.35)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) \quad (7.36)$$

Logaritmând relația (7.35) și înmulțind cu 20 se obține:

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left( \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \right) = \sum_{i=1}^n 20 \lg A_i(\omega) \quad (7.37)$$

sau într-o exprimare în dB:

$$A_{dB} = \sum_{i=1}^n A_i(\omega)_{dB} \quad (7.38)$$

Această relație arată că: atenuarea rezultantă a elementelor legate în serie, exprimată în decibeli, se poate obține ca sumă a atenuărilor elementelor componente exprimate tot în  $dB$ . O exemplificare a acestui principiu de lucru este prezentată în figura 7.6.

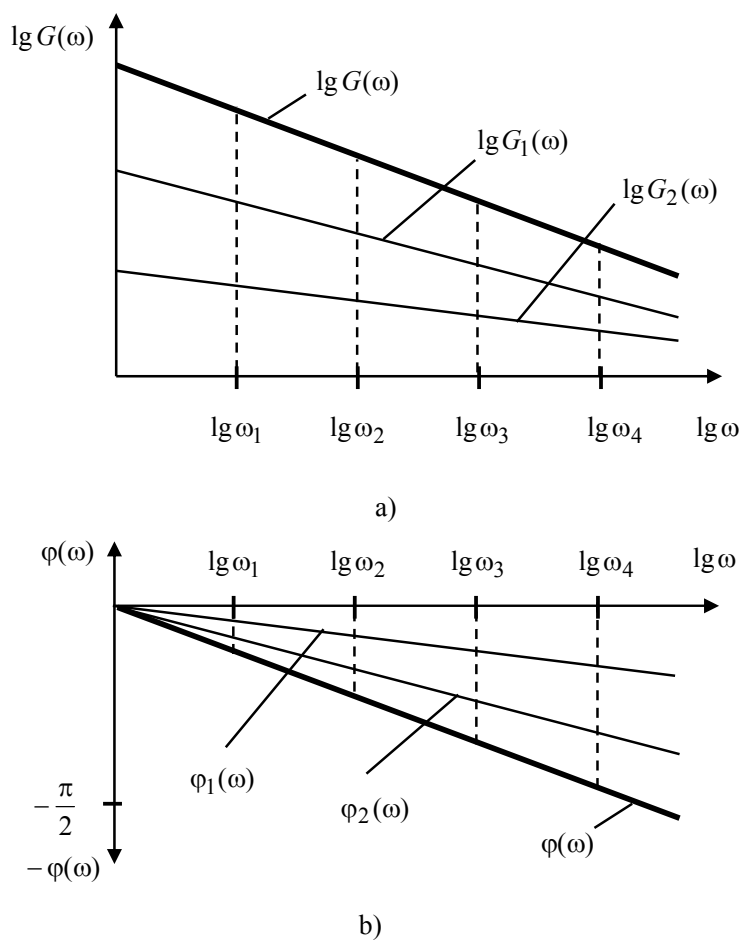


Fig. 7.6 Construcția grafică a caracteristicilor de frecvență

### 7.2.3. Trasarea locului de transfer

Trasarea se poate realiza *manual* prin două metode:

1. *metoda A* – se consideră forma explicită sau implicită de exprimare a curbei  $V = f(U)$ . Se analizează apoi comportarea la joasă frecvență ( $\omega = 0$ ) și la înaltă frecvență ( $\omega \rightarrow \infty$ ).
2. *metoda B* – se studiază funcțiile  $f_1 = U(\omega)$  și  $f_2 = V(\omega)$  ca funcții reale de variabilă  $\omega$ .

Pentru o trasare cât mai riguroasă a graficului, se poate apela la metodologia de reprezentare grafică a funcțiilor și considera astfel în mod suplimentar în cadrul analizei:

- intersecția cu axele;
- trasarea asimptotelor și precizarea limitelor la capete;
- monotonie (prin derivata de ordinul 1).

**7.2.3.1. Exemplu de calcul**

Se consideră un sistem cu funcția de transfer  $G(s) = \frac{K}{s^3 + 1}, K > 0$ . Se cere

reprezentarea locului de transfer.

*Soluție*

Exprimarea în domeniul frecvenței permite scrierea funcției de transfer sub forma:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^3 + 1} = \frac{K}{1 - j\omega^3} = \frac{K}{1 + \omega^6} + j \frac{K\omega^3}{1 + \omega^6} \tag{7.39}$$

În conformitate cu notațiile introduse în paragrafele anterioare, se pot identifica funcțiile:

$$U(\omega) = \frac{K}{1 + \omega^6} \tag{7.40}$$

$$V(\omega) = \frac{K\omega^3}{1 + \omega^6} \tag{7.41}$$

• **Metoda A**

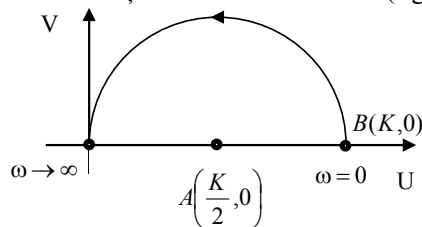
După transformări asupra ecuațiilor (7.40), (7.41) se obține

$$U^2(\omega) + V^2(\omega) = KU(\omega) \tag{7.42}$$

sau

$$\left(U - \frac{K}{2}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2 \tag{7.43}$$

Ecuția (7.43) descrie un cerc cu centrul în punctul  $A(\frac{K}{2}, 0)$  și de rază  $\frac{K}{2}$  (vezi Anexa 6/cap.12). Pentru  $\omega \geq 0$  ecuația descrie un semicerc (fig.7.7).



**Fig. 7.7 Locul de transfer**

• **Metoda 2**

Pe baza ecuațiilor (7.40), (7.41) se pot determina:

a) Intersecțiile cu axele:

$$\begin{aligned} U(0) &= K \\ V(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.44)$$

b) Asimptote, limite la capete:

$$U(\infty) = 0_+ \quad (7.45)$$

$$V(\infty) = 0_+ \quad (7.46)$$

c) Monotonie

Derivatele de ordinul 1 pentru cele două funcții sunt:

- $U'(\omega) = -\frac{6K\omega^5}{(1+\omega^6)^2} < 0, (\forall)\omega \geq 0$  și deci funcția  $U(\omega)$  este descrescătoare pe intervalul  $\omega \in [0, \infty)$ .
- $U'(\omega) = -3K\omega^2 \frac{\omega^6 - 1}{(1+\omega^6)^2} \begin{cases} > 0, & \omega < 1 \\ \leq 0, & \omega \geq 1 \end{cases}$  și deci funcția  $V(\omega)$  este crescătoare pe intervalul  $\omega \in [0, 1)$  și descrescătoare pe intervalul  $\omega \in (1, \infty)$ .

d) Tabelul de variație

Pe baza calculelor anterioare se completează tabelul de variație care permite o reprezentare grafică similară celei din metoda 1.

$\omega$	$0_+$	1	$\infty$
$U(\omega)$	$K$	$\searrow$	$0_+$
$V(\omega)$	$0$	$\nearrow$ $K/2$ $\searrow$	$0_+$

Tabelul 7.2

**7.2.3.2. Exemplu de calcul**

Se consideră un filtru RC cu schema din figura 7.8. Se cere să se traseze locul de transfer al sistemului considerat.

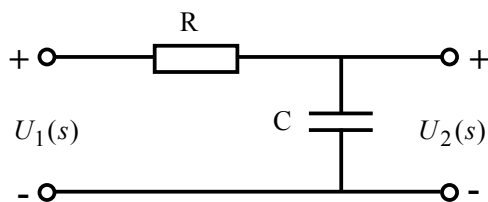


Fig. 7.8 Filtru RC

Funcția de transfer a sistemului este:

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \tag{7.47}$$

care în domeniul frecvență devine:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} \tag{7.48}$$

Conform cu cele precizate anterior, relația (7.48) se poate transforma:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} = U(\omega) - jV(\omega) \tag{7.49}$$

care permite determinarea modulului și fazei:

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \tag{7.50}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC) \tag{7.51}$$

Din relația (7.49), se poate deduce relația:

$$U^2(\omega) + V^2(\omega) = U \tag{7.52}$$

sau după transformări:

$$\left( U(\omega) - \frac{1}{2} \right)^2 + V^2(\omega) = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \tag{7.53}$$

care reprezintă un cerc cu centrul în punctul  $A(\frac{1}{2}, 0)$  (fig.7.9)

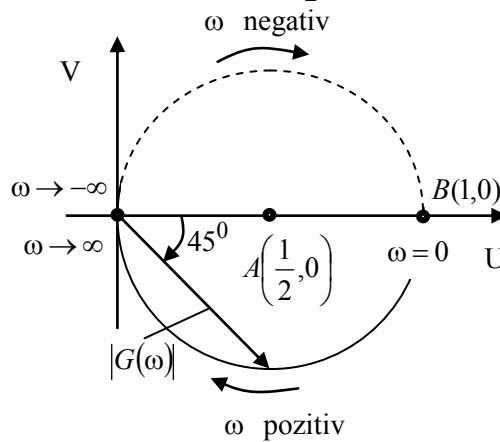


Fig. 7.9 Locul de transfer

Introducând notația  $\omega_1 = 1/RC$  și parametrul adimensional  $u = \frac{\omega}{\omega_1}$ , modulul are expresia:

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad (7.54)$$

Pentru  $\omega = \omega_1$  vom avea  $u = 1$ , și astfel:

$$|G(\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.55)$$

$$\varphi(\omega_1) = -45^\circ$$

Pentru  $\omega \rightarrow \infty$  valoarea modulului tinde spre zero,  $|G(\omega)| \rightarrow 0$  iar faza este  $\varphi(\omega) = -90^\circ$ . Pentru  $\omega = 0$  valoarea modulului este  $|G(\omega)| = 1$  iar faza este  $\varphi(\omega) = 0^\circ$ .

#### 7.2.4. Diagramele Bode

##### 7.2.4.1. Introducere

Problema care este analizată are în vedere un sistem descris prin funcția de transfer  $H(s)$ . Pentru acest sistem se cere trasarea caracteristicilor:

$$\|H(\omega)\|_{dB} = f(\lg \omega) \quad (7.56)$$

$$\varphi(\omega) = f(\lg \omega) \quad (7.57)$$

pentru  $\omega \in (0, \infty)$ .

În tabelul 7.3 se prezintă funcțiile cele mai des întâlnite în studiul sistemelor automate.

Tabelul 7.3

Factori independenți de frecvență	$K$
Factori corespunzători unor zerouri și poli simpli de origine	$j\omega$ sau $1/j\omega$
Factori liniari corespunzând unor zerouri simple	$j\omega\tau_1 + 1$
Factori liniari corespunzând unor poli simpli	$\frac{1}{j\omega\tau_1 + 1}$
Factori de ordinul 2 (cuadratici)	$\left[ \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1}$

Astfel, o **constantă K** (produsul tuturor termenilor independenți de frecvență din funcția de transfer scrisă sub forma generalizată) poate fi reprezentată grafic pe baza

relației (fig.7.10) :

$$K_{dB} = 20 \lg K \quad (7.58)$$

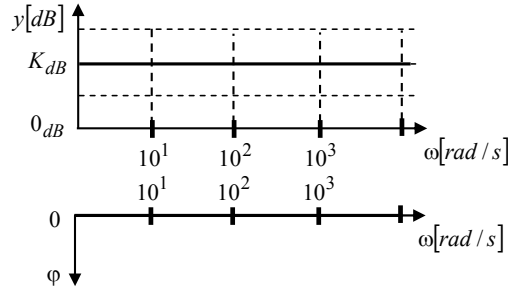


Fig. 7.10 Caracteristicile de frecvență ale unei constante

Pentru *zerouri și poli în origine*,

$$\left. \begin{array}{l} - \text{zerouri} \quad (j\omega)^n \\ - \text{poli în origine} \quad \frac{1}{(j\omega)^n} \end{array} \right\} = (j\omega)^{\pm n} = \omega^{\pm n} \cdot (j)^{\pm n} = \omega^{\pm n} \cdot e^{\pm jn \frac{\pi}{2}} \quad (7.59)$$

caracteristicile modulului și fazei se determină ca fiind (semnul + se ia pentru zerouri iar semnul minus (-) pentru poli în origine):

$$\begin{aligned} \|G\| &= \omega^{\pm n} \\ \|G\|_{dB} &= \pm n \cdot 20 \lg \omega \end{aligned} \quad (7.60)$$

$$\arg(G) = \pm n \frac{\pi}{2} \quad (7.61)$$

Caracteristica amplitudinii este o linie dreaptă. Panta se poate determina considerând variația  $\Delta$  a amplitudinii (în dB) pentru o variație a frecvenței:

$$\Delta_{dB} = \pm n \cdot 20 \cdot (\lg \omega_2 - \lg \omega_1) = \pm n \cdot 20 \cdot \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (7.62)$$

Pentru o variație a frecvenței de o octavă,  $\omega_2 = 2\omega$  și  $\omega_1 = \omega$ , relația anterioară conduce la valoarea pantei:

$$\Delta_{dB} = \pm n \cdot 20 \cdot \lg \frac{2\omega}{\omega} = \pm n \cdot 20 \cdot \lg 2 \approx \pm n \cdot 20 \cdot 0.3 = \pm 6 \text{ dB/octava} \quad (7.63)$$

Pentru o variație a frecvenței de o decadă,  $\omega_2 = 10\omega$  și  $\omega_1 = \omega$ , relația anterioară conduce la valoarea pantei:

$$\Delta_{dB} = \pm n \cdot 20 \cdot \lg \frac{10\omega}{\omega} = \pm n \cdot 20 \cdot \lg 10 = \pm n \cdot 20 \cdot 1 = \pm 20 \text{ dB/decada} \quad (7.64)$$

Unghiul de fază pentru un zero sau un pol în origine este constant,  $\pm n \cdot \frac{\pi}{2}$ , independent de frecvență (fig.7.11).

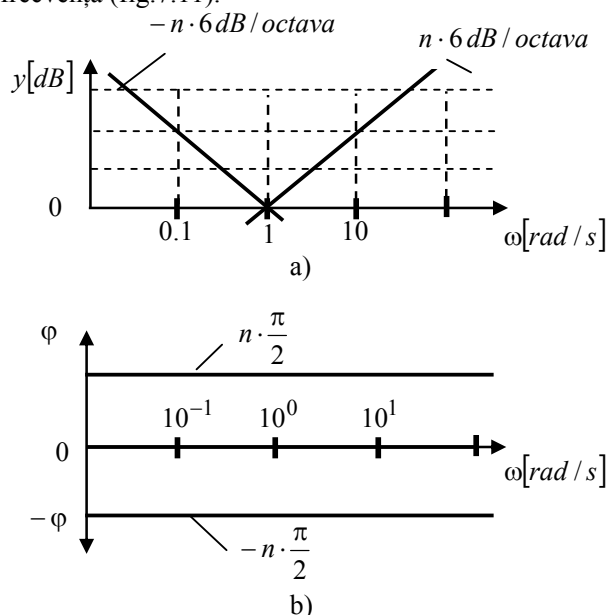


Fig. 7.11 Caracteristicile de frecvență pentru  $(j\omega)^{\pm n}$

Pentru factori corespunzători unor *zerouri simple* de forma

$$G = j\omega\tau_1 + 1 \quad (7.65)$$

În acest caz, modulul se aproximează conform expresiei:

$$\|G\| = \sqrt{1 + (\omega\tau_1)^2} \approx \begin{cases} 1 & \text{daca } \omega\tau_1 \ll 1 \\ \omega\tau_1 & \text{daca } \omega\tau_1 \gg 1 \end{cases} \quad (7.66)$$

sau în reprezentare în dB:

$$\|G\|_{dB} = \begin{cases} 20 \lg 1 = 20 \cdot 0 = 0 & \text{daca } \omega\tau_1 \ll 1 \\ 20 \lg(\omega\tau_1) & \text{daca } \omega\tau_1 \gg 1 \end{cases} \quad (7.67)$$

Pentru ambele cazuri caracteristica este o linie dreaptă: o dreaptă în lungul axei de 0 dB în domeniul pulsațiilor joase și respectiv o dreaptă de pantă de 6 dB/octavă în domeniul pulsațiilor înalte. Dreapta de pantă 6 dB / octavă reprezintă de fapt o asimptotă a caracteristicii amplitudine-frecvență și taie axa absciselor în punctul  $\omega_0 = \frac{1}{\tau_1}$ . Punctul de intersecție este denumit „punct de frângere” iar frecvența corespunzătoare frecvență de frângere. În jurul frecvenței de frângere caracteristica deviază ușor de la dreptele asimptotice. Aceste deviații pot fi calculate în jurul



punctului de frângere:

- pentru  $\omega = \frac{1}{\tau_1}$ , valoarea modulului este:

$$20\lg|j\omega\tau_1 + 1| = 20\lg|j + 1| = 20\lg\sqrt{2} = 20 \cdot 0.1505 \approx 3 \text{ dB} \quad (7.68)$$

astfel că deviația de la asimptotă este  $\Delta = 3 - 0 \approx 3 \text{ dB}$ .

- pentru pulsație dublă,  $\omega = \frac{2}{\tau_1}$ , valoarea modulului este:

$$20\lg|j\omega\tau_1 + 1| = 20\lg|j2 + 1| = 20\lg\sqrt{5} \approx 20 \cdot 0.34948 \approx 6.989 \text{ dB} \quad (7.69)$$

astfel că deviația de la asimptotă este  $\Delta = 6.989 - 6 \approx 1 \text{ dB}$ .

- pentru pulsație înjumătățită,  $\omega = \frac{1}{2\tau_1}$ , valoarea modulului este:

$$20\lg|j\omega\tau_1 + 1| = 20\lg\left|j\frac{1}{2} + 1\right| = 20\lg\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \approx 20 \cdot 0.0484 \approx 0.969 \text{ dB} \quad (7.70)$$

astfel că deviația de la asimptotă este  $\Delta \approx 0.969 - 0 \approx 1 \text{ dB}$ .

În figura 7.12 se prezintă caracteristica amplitudine – frecvență pentru cazul unei frecvențe de frângere  $\omega_0 = 1$ . Se indică pe grafic și reprezentarea aproximativă cu eroare de reprezentare în punctul de frângere.

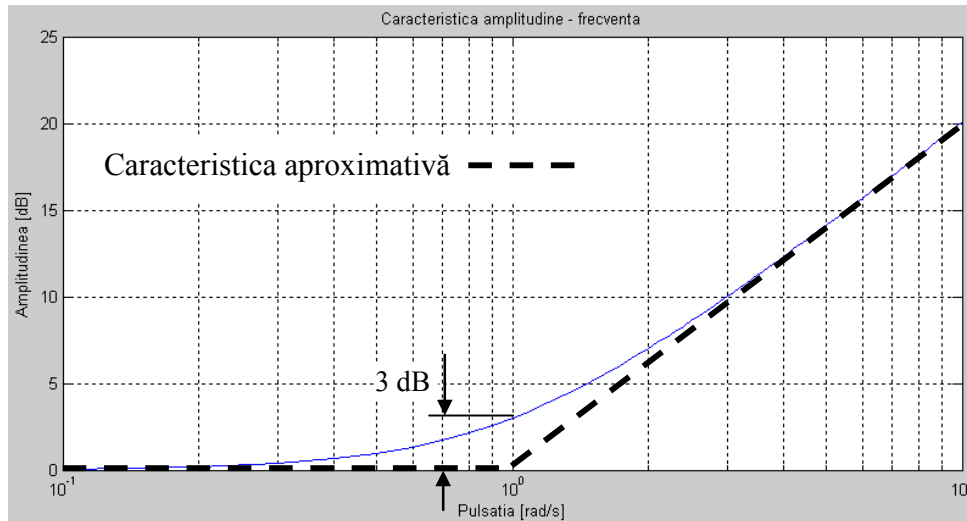


Fig. 7.12 Caracteristica amplitudine-frecvență pentru zerouri simple

Unghiul de fază pentru un factor corespunzător unui zero simplu se obține din expresia:

$$\varphi = \arctg(\omega\tau_1) \quad (7.71)$$

Curba caracteristică prezintă oordonată de  $45^\circ$  pentru  $\omega\tau_1=1$ , care corespunde pulsației de frângere. Caracteristica este cea a unei funcții *arctg* clasice. Această curbă se poate aproxima printr-o dreaptă care trece prin punctele de coordonate  $(0.1\omega_0, 0^\circ)$ ,  $(\omega_0, 45^\circ)$  și  $(10\omega_0, 90^\circ)$  (fig.7.13).

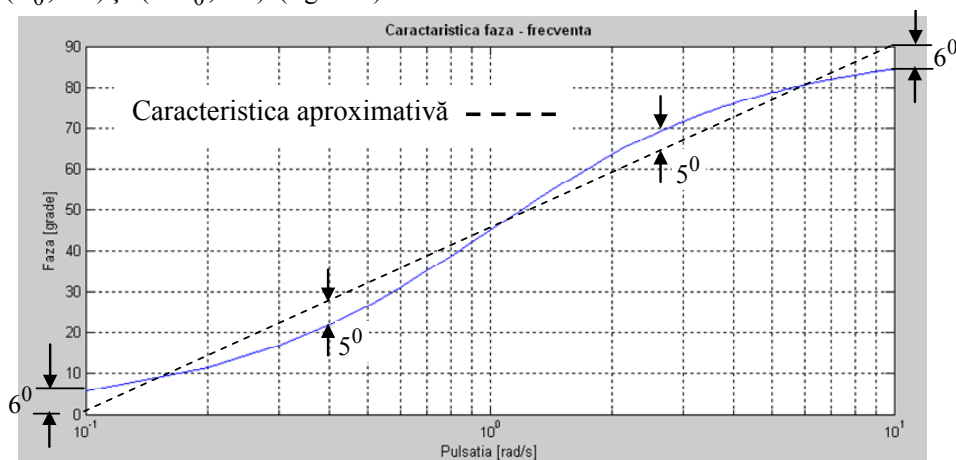


Fig. 7.13 Caracteristica fază – frecvență pentru zerouri simple

Factorii corespunzători unor *poli simpli*:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_2 + 1} \quad (7.72)$$

pot fi tratați într-un mod asemănător cu factorii referitor la zerouri simple (logaritmul inversului unei mărimi este egal și de semn contrar cu logaritmul mărimii).

Factorii referitori la poli cuadratici au forma:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{1}{1 + j2\xi u - u^2} \quad (7.73)$$

unde s-a introdus parametrul adimensional  $u = \omega/\omega_n$ .

Modulul pentru factorul corespunzător unui pol quadratic, va fi:

$$\|G\|_{dB} = 20\lg|G| = -10\lg\left[(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2\right] \quad (7.74)$$

a cărei reprezentare grafică este dată în figura 7.14. Se constată că pentru  $\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ , pulsație de rezonanță, amplificarea este maximă, cu atât mai mare cu cât  $\xi$  este mai mic.

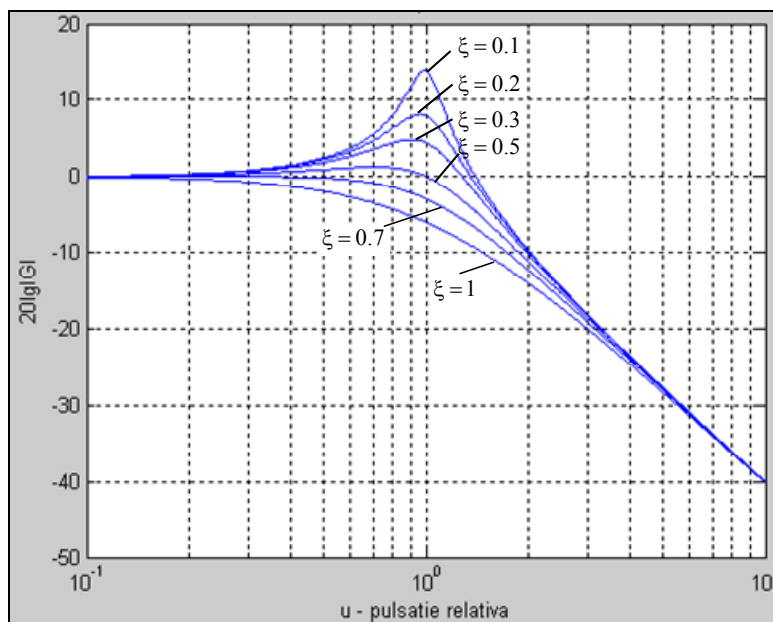


Fig. 7.14 Caracteristica amplitudine – frecvență pentru poli cuadratici

Amplificarea maximă a modului  $|G|$  se obține la pulsația de rezonanță și este egală cu:

$$Y_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{7.75}$$

Graficul dependenței amplificare –  $\xi$  permite determinarea valorii coeficientului  $\xi$  la o amplificare dată (fig.7.15).

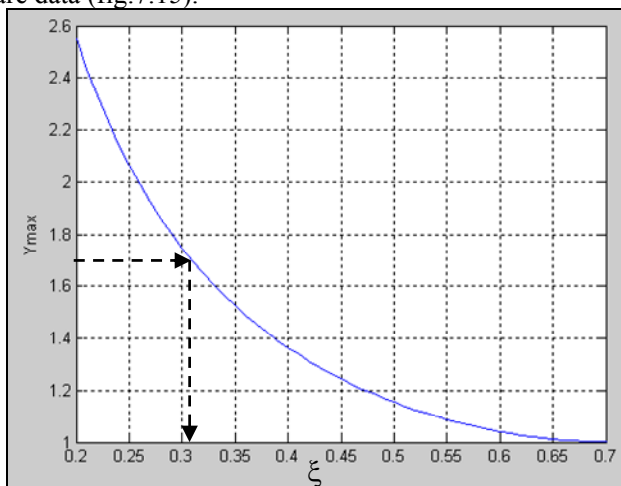


Fig. 7.15 Valoarea maximă a amplificării

În același mod se definește dependența pulsație relativă - coeficientul  $\xi$  (fig.7.16)

$$\frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (7.76)$$

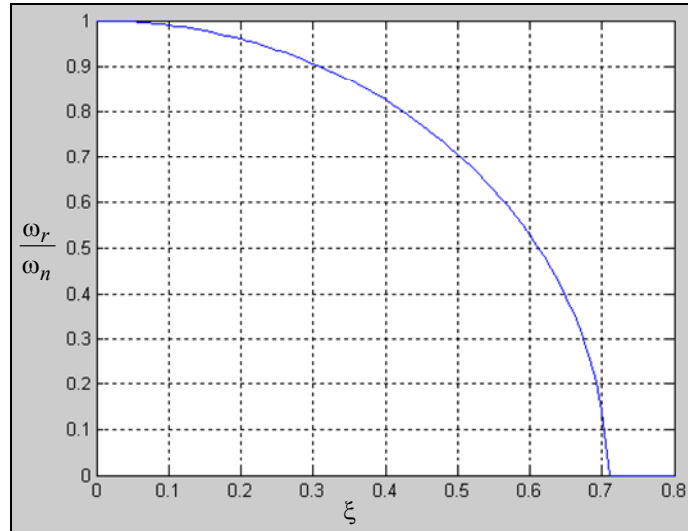


Fig. 7.16 Dependența pulsație relativă -  $\xi$

Pe baza relației (7.73) se poate determina și unghiul de fază:

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{2\xi u}{1 - u^2}\right) \quad (7.77)$$

și a cărei reprezentare grafică este dată în figura 7.17.

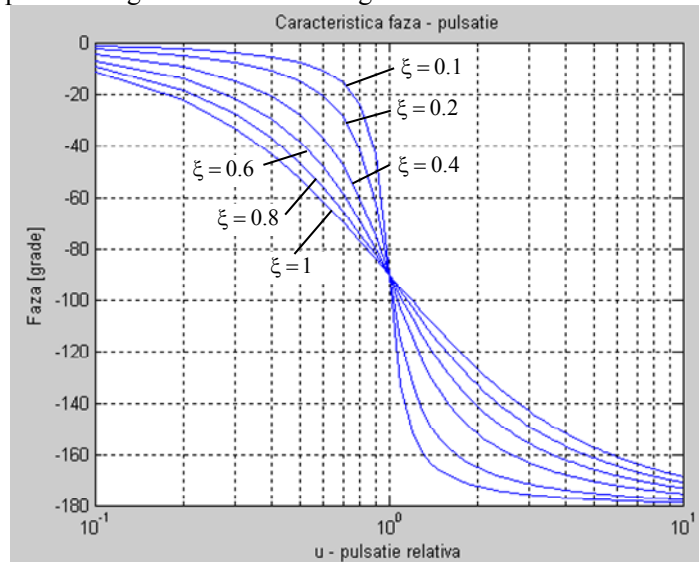


Fig. 7.17 Caracteristica faza-pulsație

O procedură de desenare a acestor caracteristici este în conformitate cu algoritmul:

- a) Se prelucrează funcția de transfer aducându-se sub forma unor produse de funcții de transfer:
- b) Se determină *frecvențele de tăiere* în ordinea crescătoare (descrescătoare a constantelor de timp). În acest mod intervalul admis pentru pulsația  $\omega$  este divizat pe *benzi de frecvență*:  
 $(0, \infty) = (0, \omega_{T_1}) \cup (\omega_{T_1}, \omega_{T_2}) \cup (\omega_{T_2}, \omega_{T_3}) \cup \dots$  pentru  $\omega_{T_k} = \frac{1}{T_k}$
- c) Se trasează *caracteristica amplitudine -frecvență*: pe fiecare bandă de frecvență corespunzătoare fiecărui element adunând pantele.
- d) Se trasează *caracteristica fază - frecvență*: se trasează caracteristica fiecărui element pe același grafic și apoi se însumează graficele pe fiecare bandă de frecvență.

**7.2.4.2. Exemplu de calcul**

Se reconsideră filtrul R-C (fig.7.8) pentru care se cere să se determine comportamentul în domeniul frecvență.

În cadrul pct.7.2.3.2 s-a determinat modulul variabilei complexe:

$$\|G(j\omega)\| = \sqrt{[\text{Re}(G(j\omega))]^2 + [\text{Im}(G(j\omega))]^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{7.78}$$

astfel că se poate determina:

$$\|G(\omega)\|_{dB} = 20 \lg \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)^{-1} = -10 \lg \left( 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) \tag{7.79}$$

Pentru frecvențe reduse,  $\omega \ll \omega_0$  și  $f \ll f_0$  relația (7.78) devine:

$$\|G(\omega)\| \approx \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \tag{7.80}$$

care în exprimare în dB este aproximativ:

$$\|G(\omega)\|_{dB} \approx 0 \tag{7.81}$$

Pentru  $\omega \gg \omega_0$  și  $f \gg f_0$  sau  $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ , relația (7.78) se poate aproxima în mod succesiv:

$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad (7.82)$$

și astfel :

$$\|G(\omega)\| \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-1} \quad (7.83)$$

În corespondență cu fig.7.5, cazul  $n = -1$ , panta caracteristicii este  $-20 \text{ dB/decada}$ .

La limită,  $f = f_0$ , relația (7.78) devine :

$$\|G(\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.84)$$

iar în exprimare în  $\text{dB}$ :

$$\|G(\omega)\|_{\text{dB}} = -20 \lg(\sqrt{2}) = -20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lg 2 = -10 \cdot 0.30103 \approx -3 \text{ dB} \quad (7.85)$$

În mod similar se pot calcula puncte intermediare pe caracteristică la frecvențe  $f = f_0/2$  și  $f = 2f_0$ .

În fig. 7.18 este prezentată caracteristica aproximativă amplitudine – frecvență.

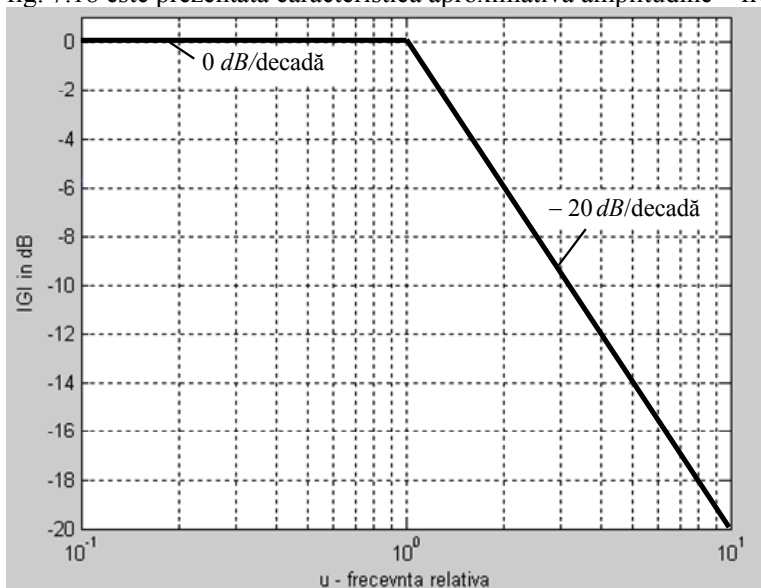
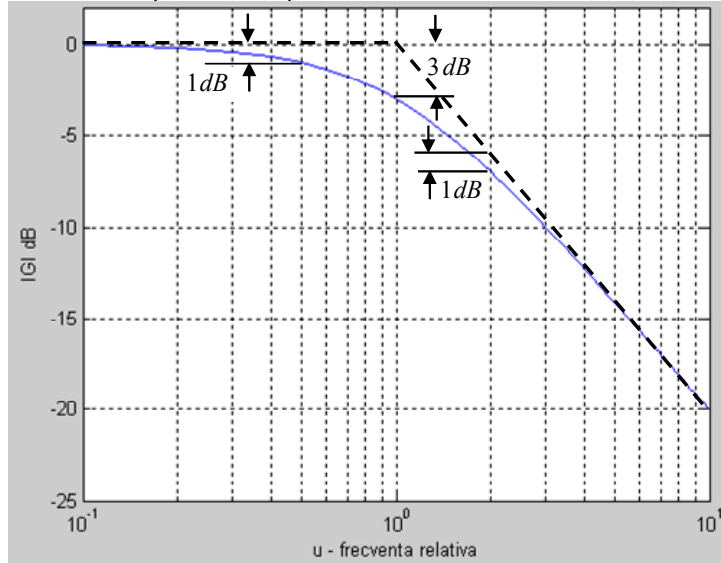


Fig. 7.18 Caracteristica aproximativă amplitudine-frecvență

În figura 7.19 se prezintă caracteristica amplitudine – frecvență în care se evidențiază erorile de reprezentare aproximativă.

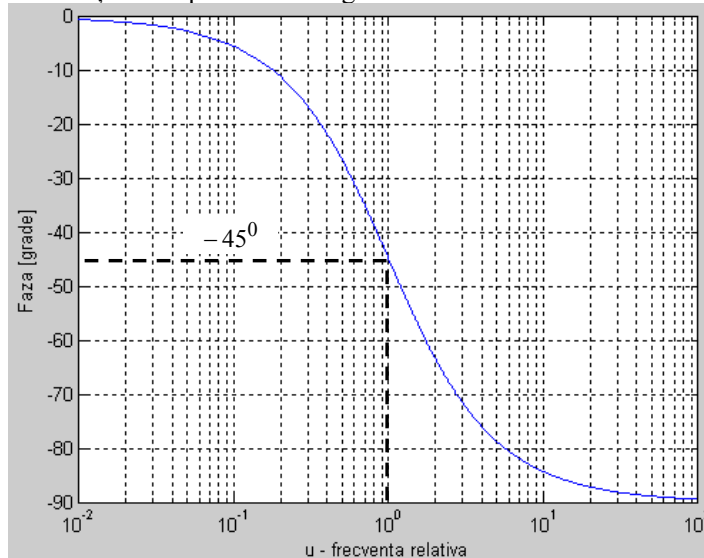


**Fig. 7.19 Caracteristica amplitudine – frecvență**

Pentru determinarea caracteristicii fază – frecvență, se determină:

$$\angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1} \left( \left[ \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} \right] \right) = -\text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \tag{7.86}$$

Graficul funcției este prezentat în figura 7.20.



**Fig. 7.20 Caracteristica fază-frecvență**

### 7.2.4.3. Trasarea diagramelor Bode în Matlab

Pentru trasarea diagramelor Bode cu ajutorul mediului de lucru Matlab se pot folosi metodele:

- a) scrierea unui fișier \*.m de lucru pe baza funcției `bode` într-una din variantele de sintaxă:
- `bode(num, den)` – unde: *num* este vectorul coeficienților polinomului de la numărătorul funcției de transfer; *den* – vectorul coeficienților polinomului de la numitorul funcției de transfer. Rezultatul apelării unui astfel de program constă în obținerea diagramelor Bode.
  - `[mag, phase]=bode(num,den,w)` – unde *w* – este vectorul frecvențelor [rad/s] furnizat de utilizator pentru evaluarea răspunsului la frecvență al sistemului specificat prin funcția de transfer. Vectorul frecvențelor se construiește în funcție de tipul sistemului dinamic liniar. Pulsațiile de tăiere corespunzătoare polilor și zerourilor sistemului trebuie incluse în intervalul dat.
  - `[mag, phase,w]=bode(num,den)` – returnează vectorul frecvențelor *w* și matricele coloană *mag* (amplitudine) și *phase* (fază). Diagramele Bode nu sunt trasate pe ecran dar se pot obține utilizând în fișierul de lucru comenzile:
    - ✓ pentru graficul atenuare – pulsație

`plot(log10(w), 20*log10(mag));` sau  
`loglog(w,mag);`

✓ pentru graficul fază - pulsație

`plot(log10(w), phase);` sau  
`semilogx(w,phase);`

- b) utilizarea interfeței grafice pentru sistemele LTI (vezi pct.6.5.3).

### 7.2.4.4. Exemplu de calcul

Funcția de transfer pentru sistemul actuator – picior al unui robot pășitor este:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (7.87)$$

Se cere să se traseze diagramele Bode prin metodele specificate anterior.

- 1) Fișierul de lucru pentru reprezentarea diagramelor Bode este prezentat în figura 7.21 iar rezultatul obținut în figura 7.22.

```
% Trasarea diagramelor Bode
num=1;
den=[1 2 10 0];
bode(num,den)
grid on
```

Fig. 7.21 Fișierul de lucru pentru trasarea diagramelor Bode



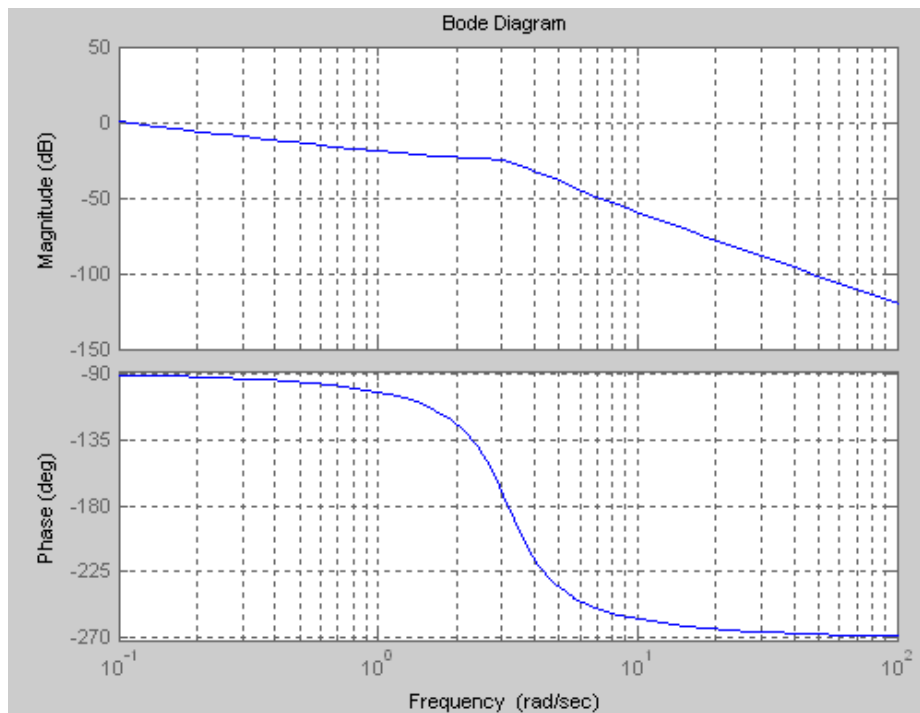


Fig. 7.22 Diagramele Bode pentru sistemul dat

- 2) Un fișier de lucru pentru construirea diagramelor Bode, cu declararea vectorului frecvențelor, este prezentat în figura 7.23

Vectorul frecvențelor „w” este construit de la valoarea zero cu un pas de indexare unitar până la valoarea 100 [rad/s]. Axele de reprezentare pentru frecvență și amplitudine sunt liniare. S-a apelat la funcția *subplot* ( ) pentru reprezentarea în cadrul aceleiași figuri a două grafice separate: amplitudinea și respectiv faza (fig.7.23). S-a apelat la funcția *xlabel* ( , .); *ylabel* ( , .); pentru introducerea semnificației fiecărei axe. Se poate utiliza și introducerea vectorului frecvențelor pe baza funcției *logspace*(w1,w2,n) unde n este numărul de puncte între cele două limite (fig.7.24).

```
% Trasarea diagramelor Bode
num=1;
den=[1 2 10 0];
w=0:1:100;
[mag,phase]=bode(num,den,w);
subplot(2,1,1);plot(log10(w),20*log10(mag));grid on;
xlabel('frecventa-log(w)');ylabel('G[dB]');
subplot(2,1,2);plot(log10(w),phase);grid on;
xlabel('frecventa-log(w)');ylabel('Faza [grade]');
```

Fig. 7.23 Fișier de lucru pentru construirea diagramelor Bode

```
% Trasarea diagramelor Bode
num=1;
den=[1 2 10 0];
w=logspace(0.01,2,100)
[mag,phase]=bode(num,den,w)
bode(num,den,w);grid on;
```

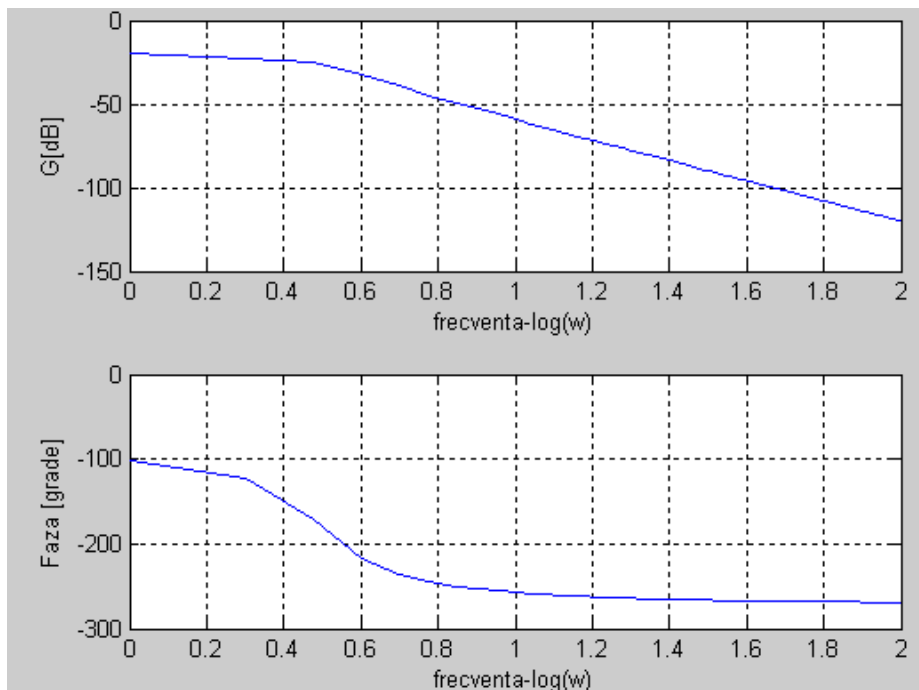
Fig. 7.24 Variantă de fișier de lucru pe baza funcției *logspace*

Fig. 7.25 Diagramele Bode în versiunea axelor liniare

Într-o altă variantă de construcție a diagramelor s-a apelat la reprezentarea logaritmică a axei frecvențelor prin utilizarea funcției *semilogx()*. (fig.7.26). Se obțin diagramele Bode în mod asemănător cazurilor anterioare.

```
% Trasarea diagramelor Bode
num=1;
den=[1 2 10 0];
w=0:1:100;
[mag,phase]=bode(num,den,w);
subplot(2,1,1);semilogx(w,20*log10(mag));grid on;
xlabel('frecventa-log(w)');ylabel('G[dB]');
subplot(2,1,2);semilogx(w,phase);grid on;
xlabel('frecventa-log(w)');ylabel('Faza [grade]');
```

Fig. 7.26 Variantă de fișier de lucru pentru construirea diagramelor Bode

### 7.3. Răspunsul sistemelor liniare în domeniul frecvenței

#### 7.3.1. Considerații teoretice

Dacă pentru un sistem se cunosc diagramele Bode, atunci cu ajutorul acestora se poate calcula rapid răspunsul sistemului în regim permanent sinusoidal la un semnal de intrare.

Să considerăm că semnalul de intrare într-un sistem descris de funcția de transfer  $G(s)$  are ecuația (fig.7.9):

$$u(t) = X \sin \omega_1 t \quad (7.88)$$

sau echivalentul

$$U(s) = \frac{\omega_1 X}{s^2 + \omega_1^2} \quad (7.89)$$

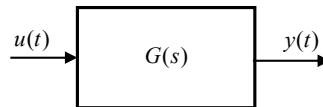


Fig. 7.27 Sistem liniar cu semnal sinusoidal la intrare

Conform celor cunoscute, se poate determina răspunsul sistemului sub forma:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (7.90)$$

Se poate arăta (vezi și pct.7.2.1) că semnalul de ieșire este de forma:

$$y(t) = Y \sin(\omega_1 t + \varphi) = X |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega_1 t + \arg(G(j\omega))) \quad (7.91)$$

Răspunsul sistemului în regim permanent este caracterizat de un semnal de ieșire cu o amplitudine diferită față de cea a semnalului de intrare și defazat cu un anumit unghi.

Având în vedere cele specificate anterior și modul de definire a amplitudinii se poate scrie raportul amplitudinilor:

$$A = \frac{Y}{X} = |G(j\omega)| \quad (7.92)$$

sau într-o reprezentare în dB:

$$A_{dB} = 20 \lg |G(j\omega)| = \begin{cases} > 0, \text{ semnalul este amplificat de sistem} \\ 0, \text{ sistemul nu modifica amplitudinea} \\ < 0, \text{ semnalul de intrare este atenuat} \end{cases} \quad (7.93)$$

Valoarea  $A_{dB}$  se poate obține în mod direct din diagramele Bode (caracteristica amplitudine frecvență) pentru pulsația semnalului de intrare  $\omega_1$ . În acest caz din relația (7.93) se poate determina valoarea modulului:

$$|G(j\omega)| = 10^{\frac{A_{dB}}{20}} \quad (7.94)$$

Din caracteristica fază – frecvență se poate obține prin citire directă  $\varphi = \arg(G(j\omega))$ .

Determinarea modului și a fazei se poate realiza și tabelar pe baza aspectelor teoretice prezentate la pct.7.2.2 (rel.7.35, 7.36).

### 7.3.2. Exemplu de calcul

Se consideră sistemul reprezentat prin funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{200}{(s+1) \cdot (s+4) \cdot (s+5)} \quad (7.95)$$

Se cere să se determine răspunsul sistemului pentru un semnal de intrare:

$$u(t) = 4 \sin 2t \quad (7.96)$$

Din ecuația semnalului de intrare se identifică amplitudinea  $X = 4$  și pulsația  $\omega_1 = 2$  rad/s.

Utilizând construirea diagramelor Bode pe baza funcției *bode (num,den)* se obțin graficele din figura 7.28 din care se determină pentru pulsația  $\omega_1 = 2$ , valorile  $|G(s)|_{dB} = 11.4$  și  $\varphi = \arg(G(j\omega)) = -112^\circ$

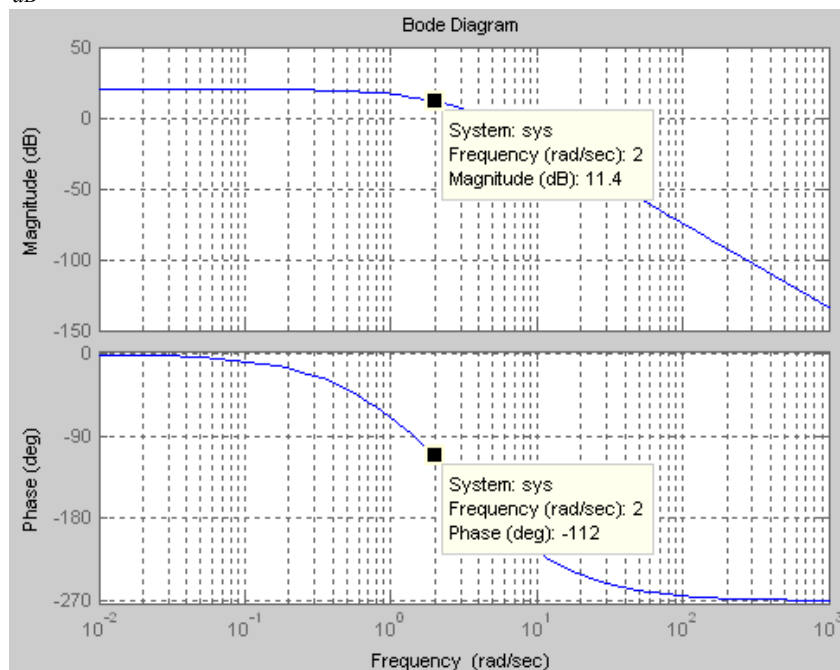


Fig. 7.28 Diagramele Bode și valorile amplitudinii și fazei pentru  $\omega_1 = 2$  rad/s

Pe baza valorilor citite din diagramele Bode, se determină expresia răspunsului sistemului:

$$y(t) = 4 \cdot 10^{\frac{11.4}{20}} \cdot \sin\left(2t - 112 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \approx 14.86 \cdot \sin(2t - 1.953) \quad (7.97)$$

Valoarea modulului  $A_{dB}$  se poate obține și pe baza relației (7.37), pornind de la funcția de transfer (vezi pct.7.2.2):

$$\begin{aligned} A_{dB} &= 20 \lg 200 - 20 \lg |1 + j\omega| - 20 \lg |4 + j\omega| - 20 \lg |5 + j\omega| = \\ &= 20 \left( \lg 200 - \lg \sqrt{1 + \omega^2} - \lg \sqrt{16 + \omega^2} - \lg \sqrt{25 + \omega^2} \right) \end{aligned} \quad (7.98)$$

iar faza pe baza relației (7.36):

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{\omega}{1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{4}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{5}\right) \quad (7.99)$$

Pentru pulsația de intrare  $\omega_1 = 2$ , relația (7.98) devine:

$$\begin{aligned} A_{dB} &= 20 \cdot \left( \lg 200 - \lg \sqrt{1 + 2^2} - \lg \sqrt{16 + 2^2} - \lg \sqrt{25 + 2^2} \right) = \\ &= 20 \cdot (2.301 - 0.349 - 0.65 - 0.731) = 11.3966 \approx 11.4 \end{aligned} \quad (7.100)$$

valoare care coincide cu cea determinată de pe caracteristica amplitudine-frecvență.

Pentru pulsația de intrare  $\omega_1 = 2$ , relația (7.99) permite determinarea unghiului de fază:

$$\varphi = -\arctg(2) - \arctg(0.5) - \arctg(0.4) = -111.8^\circ \quad (7.101)$$

care de asemenea este apropiată cu cea determinată pe caracteristică.

### 7.3.3. Indicatori de calitate ai sistemelor definiți pe baza diagramelor Bode

Se consideră în general două categorii de indicatori de calitate [7.6]:

- *indicatori de calitate sintetici* – cunoscuți și sub numele de indicatori tehnici de calitate care definesc anumiți parametri ai răspunsului sistemului la intrări standard;
- *indicatori globali de calitate* – care definesc comportarea globală a sistemului pe un interval de timp finit sau infinit.

Din rândul indicatorilor sintetici de calitate pentru regimuri armonice se pot aminti:

- **banda de pulsație.** În evaluarea unor sisteme tehnice se folosește adeseori nivelul de  $-3\text{ dB}$ . Acest nivel este legat cu ceea ce s-a definit drept bandă de pulsație și pulsație de bandă. Banda de pulsație  $\Lambda_b$  reprezintă domeniul de

valori ale lui  $\omega$  pentru care  $|G(\omega)| \geq |G(0)| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7 \cdot |G(0)|$  sau în exprimare în dB după calcule:

$$|G(\omega)|_{dB} \geq |G(0)|_{dB} - 0.3dB \quad (7.102)$$

Lățimea de bandă dă informații asupra vitezei de răspuns a sistemului. Cu cât aceasta este mai mare, cu atât durata regimului tranzitoriu este mai mică. Creșterea lățimii de bandă este limitată de pericolul semnalelor parazite a căror frecvență s-ar putea încadra în banda de trecere.

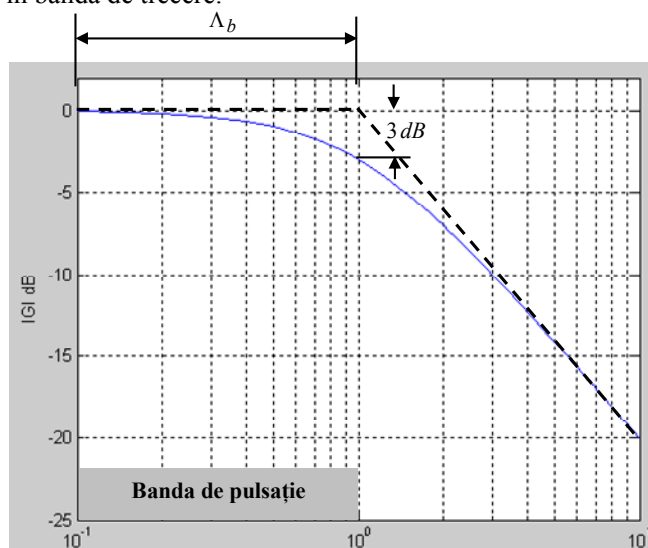


Fig. 7.29 Banda de pulsație

- **pulsația de rezonanță** -  $\omega_r$  - este pulsația pentru care  $|G(j\omega)|$  are valoarea maximă. Se recomandă ca factorul de rezonanță să fie aproximativ 1.2 la un factor de amortizare de 0.44;
- **valoarea maximă a caracteristicii amplitudine - frecvență** - este corelată cu factorul de amortizare a sistemului. Pentru a asigura limitarea suprareglajului și a abaterii maxime, se impune limitarea acestei valori.
- **pulsația de tăiere** - notată  $\omega_t$  sau  $\omega_c$  reprezintă cea mai mare pulsație pentru care hodograful taie cercul de rază unitate.
- **marginea de amplificare** - reprezintă lungimea vectorului  $\|(Gj\omega)\|_{\varphi=180}$  (fig.7.30). Acesta exprimă rezerva de stabilitate a sistemului în circuit închis, conform criteriului lui Nyquist și astfel se impune limitarea superioară a valorii.
- **marginea de fază** -  $\gamma$  - reprezintă unghiul în sens ora dintre direcția vectorului  $G(j\omega)$  și semiaxa reală negativă. Acesta exprimă rezerva de stabilitate a sistemului în circuit închis în conformitate cu criteriul lui Nyquist de stabilitate.

- **pulsația de antifază**  $-\omega_\pi$  - reprezintă cea mai mică valoare a pulsației pentru care hodograful taie semiaxa reală negativă

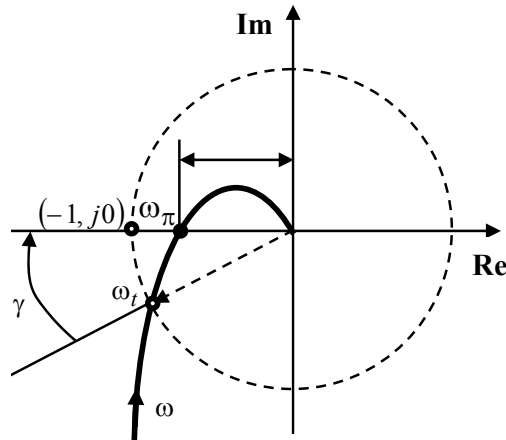


Fig. 7.30 Definirea unor indici de calitate

- **durata regimului tranzitoriu** -  $t_t$  - este definit ca timpul în care componenta tranzitorie devine sau rămâne inferioară unei valori date, de exemplu  $\Delta \leq 0.02y(\infty)$  sau  $\Delta \leq 0.05y(\infty)$

## 7.4. Stabilitatea în domeniul frecvenței Criteriul de stabilitate Nyquist

### 7.4.1. Criteriul de stabilitate Nyquist

Criteriul de stabilitate Nyquist este un criteriu frecvențial. Acest criteriu permite să se aprecieze stabilitatea unui sistem automat în circuit închis pe baza locului de transfer al sistemului deschis.

Prezentăm enunțul criteriului pentru două situații distincte:

- când *sistemul în circuit deschis este stabil* – funcția de transfer nu are nici un pol cu partea reală pozitivă.

În acest caz criteriul lui Nyquist poate fi formulat astfel: un *sistem automat în circuit închis este stabil* dacă locul geometri al sistemului deschis nu înconjoară punctul critic  $(-1, j0)$  (fig.7.31a). În caz contrar sistemul este instabil (fig.7.31b).

Din punct de vedere practic, pentru o bună stabilitate este necesară trecerea hodografului cât mai departe de punctul critic  $(-1, j0)$ . Din acest motiv rezerva de stabilitate se apreciază prin *marginea de amplificare* și *marginea de fază*.

- când *sistemul în circuit deschis este instabil*, respectiv funcția de transfer are unul sau mai mulți poli cu partea reală pozitivă.

În acest caz dacă funcția de transfer are un număr  $k$  de poli cu partea reală pozitivă, *criteriul lui Nyquist* poate fi formulat sub forma: *pentru ca sistemul automat în circuit închis să fie stabil, este necesar și suficient ca locul de transfer al sistemului*

deschis, când  $\omega$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , să înconjoare punctul critic în sens trigonometric de  $k$  ori, respectiv când  $\omega$  variază de la zero la  $+\infty$ , hodograful sistemului deschis să înconjoare punctul critic de  $k/2$  ori.

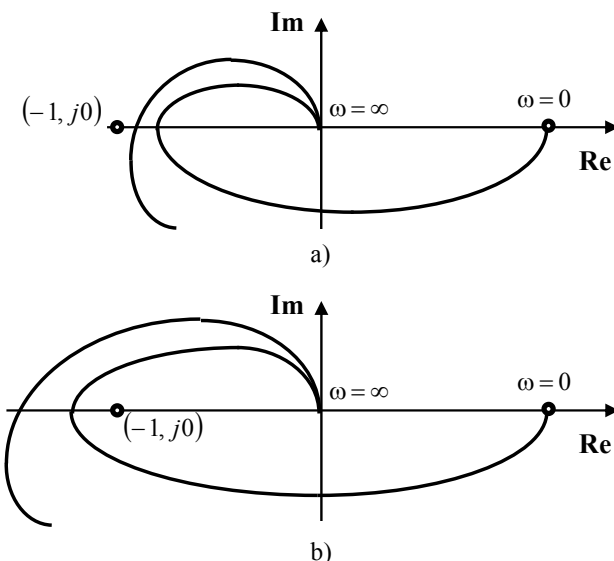


Fig. 7.31 Locul de transfer pentru un sistem închis: a) stabil; b) instabil

#### 7.4.2. Analiza stabilității pe baza funcțiilor din Matlab

Funcțiile utilizate în analiza stabilității sistemelor în domeniul frecvenței sunt:

- *nyquist (num, den)* – permite construcția locului de transfer pentru un sistem descris prin funcția de transfer  $G(s) = \frac{num}{den}$ .

Se pot utiliza și alte forme de sintaxă ale funcției:

*nyquist (num,den,w);*  
*nyquist (A,B,C,D);*  
*nyquist (A,B,C,D,w);*  
*nyquist (sys);*

unde notațiile sunt cele clasice.

- $[Gm, pm, wcp, wcg] = margin (sys)$  – permite obținerea valorilor pentru: marginea de amplificarea  $Gm$  (gain margin); marginea de fază  $pm$  (phase margin); frecvența de tăiere  $wcp$  (phase crossover frequency), frecvența de tăiere a amplificării  $wcg$  (gain crossover frequency)

Se utilizează de asemenea pentru obținerea unor parametri din domeniul frecvenței:

$[Mp, k] = max (mag)$   
 $resonant\ peak = 20 * log\ 10 (Mp)$   
 $resonant\ frequency = w (k)$



Pentru determinarea lățimii de bandă se poate utiliza fișierul din figura 7.32

```
% Determinarea latimii de banda
num=[0.5];
den=[1 2 1 0.5]
w=0.01:2:100
[M,P,w]=bode(num,den,w);
for k=1:1: length (M);
if 20*log10(M(k))+7<=0;
% mag
20*log10 (M (k))
% BW
wBW =w (k)
end
end
```

Fig. 7.32 Fișier de lucru pentru determinarea lățimii de bandă

### 7.4.3. Exemplu de calcul

Se consideră un sistem descris prin funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s^2 - 2s + 3} \quad (7.103)$$

Se cere să se analizeze stabilitatea sistemului pe baza criteriului lui Nyquist.

Din analiza funcției de transfer se observă că sistemul deschis are doi poli  $p_{1,2} = 1 \pm j \cdot 1.41$  cu partea reală pozitivă.

Utilizând funcția *nyquist* (sys) (fig.7.33) se obține locul de transfer al sistemului în stare deschisă (fig.7.34). Utilizând funcția *margin* ( ) se obțin parametrii pentru caracterizarea rezervei de stabilitate.

```
% Analiza stabilitatii in domeniul frecventei
num=[1 5 1];
den=[1 -2 3];
sys=tf(num,den)
w=0.01:2:100
[M,P,w]=bode(sys);
[Gm,Pm,wcg,wcp]=margin(M,P,w)
nyquist(sys)
```

Fig. 7.33 Fișierul de lucru pentru construcția locului de transfer

Din analiza graficului obținut, se observă că punctul critic este înconjurat în sens trigonometric de  $k = 2$  ori. Conform cu criteriul lui Nyquist, sistemul în stare închisă este stabil.

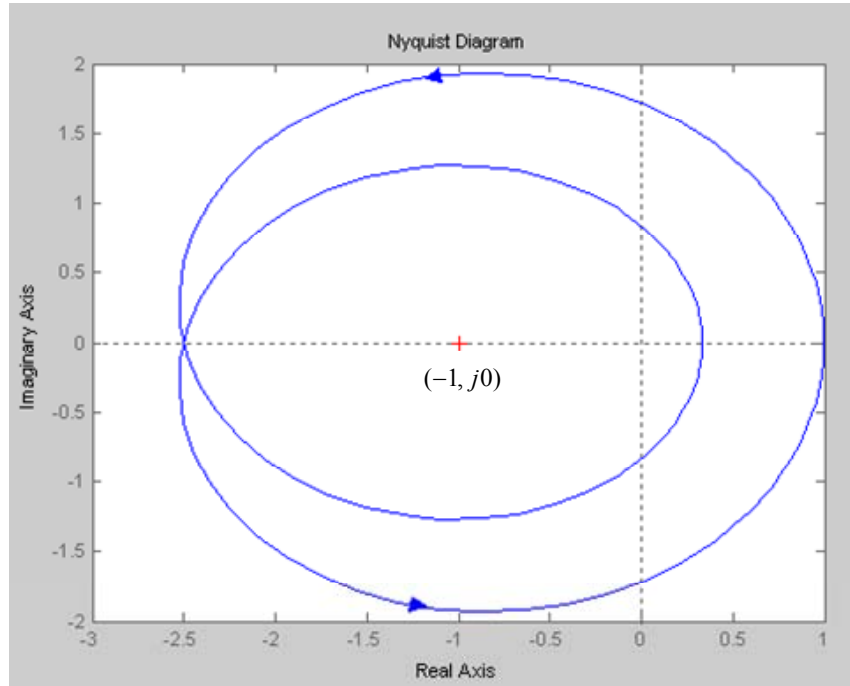


Fig. 7.34 Locul de transfer al sistemului cu funcția de transfer  $G(s)$

### 7.5. Bibliografie capitolul 7

- [7.1] Babuția, I., Petruescu, M., Automatizări electronice în construcția de mașini, Editura Facla, Timișoara, 1983
- [7.2] Bejan, I., Balaban, G., Automatizări și telecomenzi în electroenergetică, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1976
- [7.3] Bolton, W., Mechatronics. Electronic control systems in mechanical and electrical engineering, Pearson Education Limited, 2003, ISBN 0 131 21633 3
- [7.4] Dorf, R.C., Bishop, R.H., Modern Control Systems, Pearson Studium, ISBN 3-8273-7162-7, 2006
- [7.5] Dukkupati, R.V., Matlab. An introduction with applications, New Age Intern., 2010, ISBN 978-81-224-2920-6
- [7.6] Marin, C., Popescu, D., Teoria sistemelor de reglare automată, cap.8-12, Lecții de curs, Craiova, 2007
- [7.7] Savant, C.J., Calculul sistemelor automate, Editura Tehnică, București, 1967
- [7.8] Singh, K., Agnihotri, G., System Design through Matlab, Control Toolbox and Simulink, ISBN: 1852333375 / 1-85233-337-5