



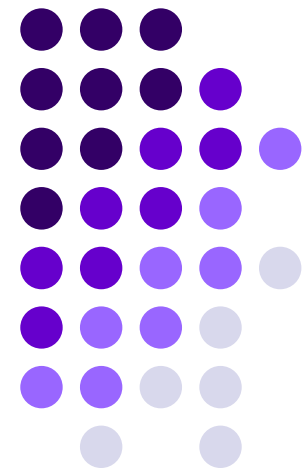
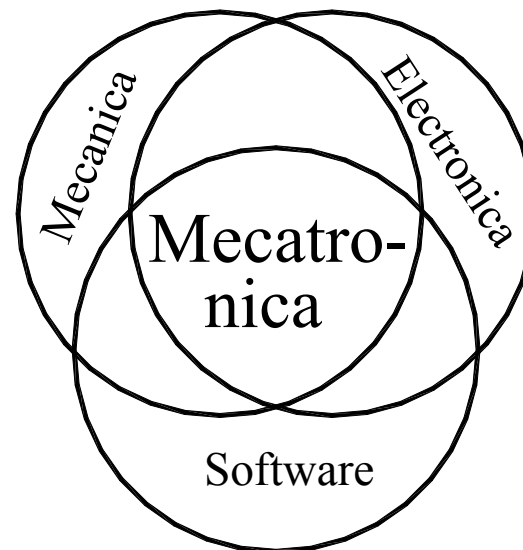
Departamentul  
de  
MECATRONICĂ

Facultatea  
de  
MECANICĂ

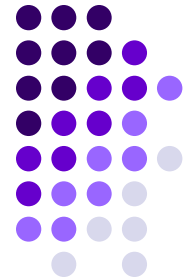


UNIVERSITATEA POLITEHNICA  
TIMIȘOARA

# PROIECTAREA SISTEMELOR MECATRONICE



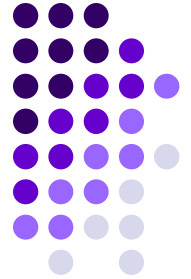
Prof. dr. ing. Valer DOLGA,



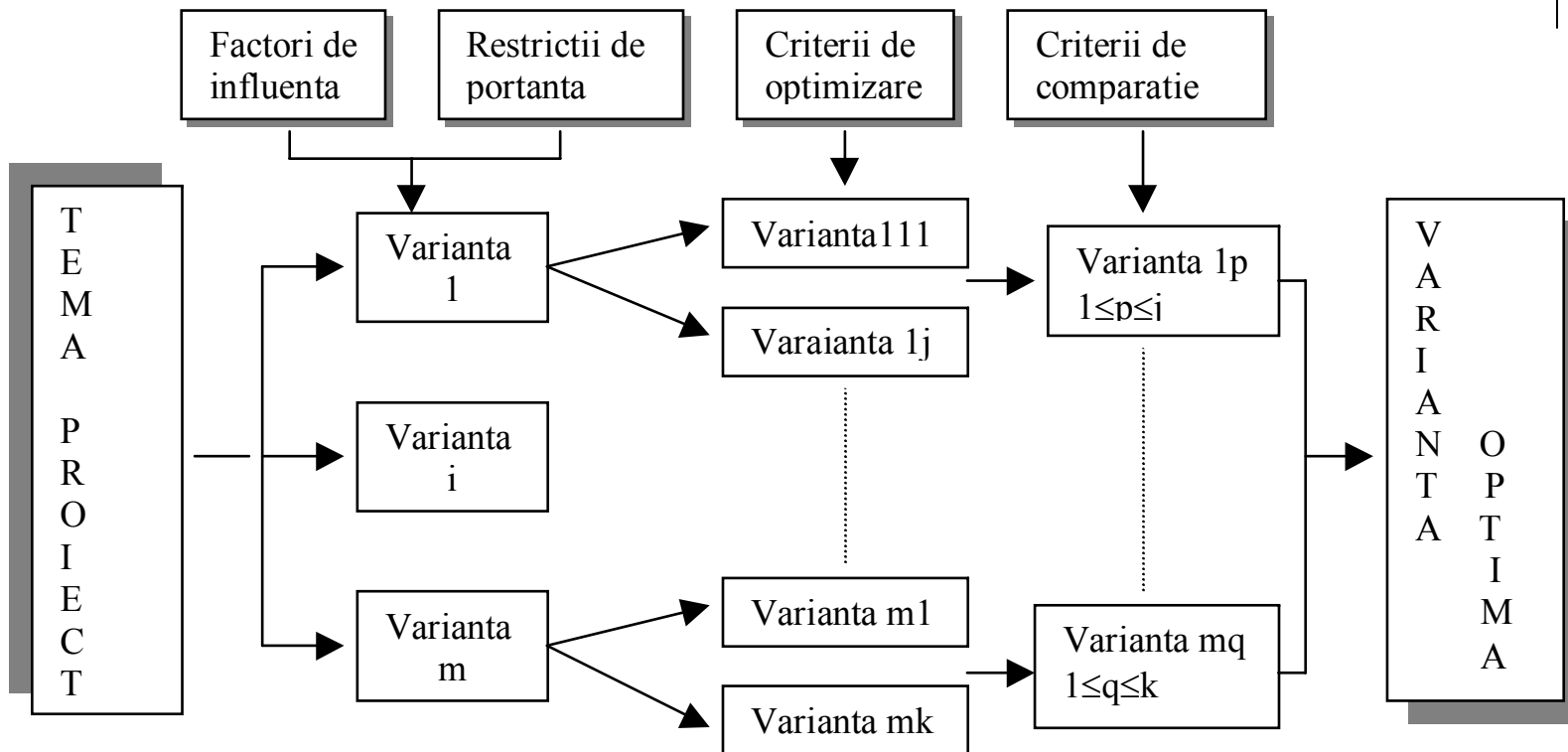
# Cuprins

- Selectarea variantei optime din multimea variantelor proiectate
  - Metode de decizie
  - Metode de decizie multiatribut
  - Metoda TOPSIS
  - Metoda AHP
  - Exemple de calcul

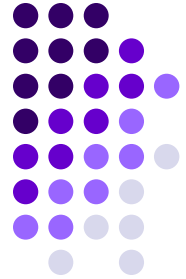
# Problema alegerii optimale



- $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) mulțimea variantelor posibile;
- **Care este varianta optima ?**



# Metode de decizie



- În faza de proiectare produsul este caracterizat:
  - parametri de proiectare;
  - restricții de portanță;
  - criterii de optimizare posibile.
- *Parametrii de proiectare:*
  - parametri geometrici** -  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  - *date dimensionale și de poziție*: lungimi “L” ale unor bare, lățimi “B” și grosimi “H” ale acestora, cote de gabarit, de legătură, de montaj etc.;
  - parametri de material** -  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  - *rezistențe admisibile ale materialului*:  $(\sigma_{ai}, \sigma_{0,2})$ , module de elasticitate longitudinal și transversal  $(E, G)$ , densitate  $\rho$  ;
  - parametri de solicitare** -  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  - *componentele torsorului din sistem*  $\tau$ ;
- **Restricțiile (de portanță, constructive)** - relații matematice de constrângere (Efortul maxim în secțiunile cele mai solicitate, parametrii geometrici de gabarit, masa produsului, frecvența de rezonanță, sensibilitatea etc. ):

$$G_i(X, Y, Z) \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} G_{i0}$$

$i = 1 \dots n$  - numărul restricțiilor introduse

## Funcțiile obiectiv

- **Criteriile de optimizare** - se exprimă matematic prin funcțiile obiectiv  $F_j(X, Y, Z)$ : caracteristici constructive sau funcționale ale produsului
- **Formularea problemei de optimizare:**

determinarea parametrilor de proiectare  $U = U(X, Y, Z)$   
care asigură extremul – minim sau maxim în dependență de criteriul ales  
– a funcției obiectiv:

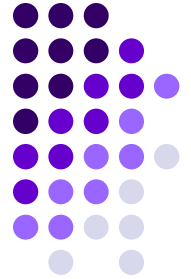
$$F_{j(U)} \Rightarrow \min(\max)$$

în prezența restricțiilor  $G_i$ .

**OBS:**

*Problema de optimizare* poate să evidențieze **insuficiența unei singure funcții – obiectiv**. De regulă aceste funcții - obiectiv sunt contradictorii: luarea în considerare a uneia dintre ele poate conduce la afectarea celorlalte.

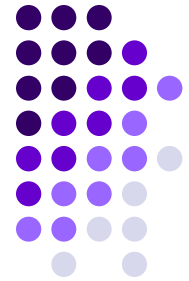
# Metode de decizie multiatribut



- **Problema de rezolvat:** selectia unei variante de produs dintr-un set de variante posibile (optimizate multiobiectiv);
- **Solutia:** algoritmi adecvați de clasificare, de sortare și de ierarhizare a informațiilor pe baza unor criterii anterior definite  $C_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).
- **Matricea de decizie - criteriile de decizie** (scop, obiective, constrângeri etc.) pe liniile matricei iar **variantele** de decizie formează coloanele: fiecare varianta se noteaza în raport cu criteriile admise.
- se va alege varianta cea mai bine cotate pe întregul pachet de criterii

Matricea de decizie	Pondere	Varianta A	Varianta B	Varianta C
Scorul total				
Criteriul 1				
Criteriul 2				
Criteriul 3				
Criteriul 4				

## Matricea consecintelor



- Evaluarea fiecărei **variante**  $V_i$  în raport cu fiecare **criteriu**  $C_j$  este oglindită în matricea consecințelor:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

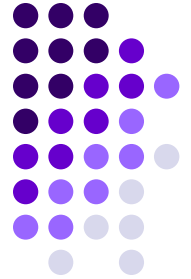
- **Criteriile de comparare:**

- criterii calitative
- cantitative

- Criteriile calitative: compararea variantelor prin:

- 4 nivele – “mic”, “mediu”, “mare”, “foarte mare” sau
- 5 nivele - – “mic”, “suficient”, “mediu”, “mare”, “foarte mare”.

# Coeficientii de importanta



- fiecare variantă primește în mod corespunzător notele:
  - 1, 3.5, 6.5, 9 sau
  - 1, 3, 5, 7, 9
- **aceste criterii devin cantitative !**

Importanta unui criteriu in raport cu altul

Intensitatea importanței $\frac{p_i}{p_j}$	Definiție	Explicație
1	Importanță egală	Cele două criterii contribuie egal la obiectiv
3	Importanță slabă	Experiența demonstrează o ușoară importanță a unui criteriu față de celălalt
5	Importanță puternică	Experiența demonstrează o importanță mai puternică a unui criteriu față de celălalt
7	Importanță demonstrată	Practica a dovedit importanța unui criteriu în raport cu celălalt
9	Importanță absolută	În mod evident un criteriu este mai important decât celălalt



## Matricea importanței relative

- vectorul coeficienților de importanță  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

- matricea importanței relative a criteriilor:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_1} & \frac{p_1}{p_2} & \frac{p_1}{p_3} & \dots & \frac{p_1}{p_n} \\ \frac{p_2}{p_1} & \frac{p_2}{p_2} & \frac{p_2}{p_3} & \dots & \frac{p_2}{p_n} \\ \frac{p_3}{p_1} & \frac{p_3}{p_2} & \frac{p_3}{p_3} & \dots & \frac{p_3}{p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{p_n}{p_1} & \frac{p_n}{p_2} & \frac{p_n}{p_3} & \dots & \frac{p_n}{p_n} \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} = \frac{p_i}{p_j} = \frac{1}{b_{ji}}$$

## Scalarea matricei consecintelor

- matricea consecințelor - date neomogene, numerice sau nenumerice;
- este necesară omogenizarea acestora printr-un proces de scalare: **ordinală, într-un interval și normalizare.**

- **Scalarea pe un interval:**  $[0, M]$

- Pentru un criteriu de maxim - valoarea de evaluare:

$$V_{scal} = M \cdot \left( 1 - \frac{V_{max} - V}{V_{max} - V_{min}} \right)$$

- pentru un criteriu de minim:

$$V_{scal} = M \cdot \left( 1 - \frac{V - V_{min}}{V_{max} - V_{min}} \right)$$

• Normalizarea = transformarea matricii consecințelor  $A = (a_{ij})$  în matricea  $R = (r_{ij})$ ;

□ normalizare vectorială:

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_1^n a_{ij}^2}} \quad \text{sau} \quad r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_1^n a_{ij}}$$

□ normalizarea prin transformări liniare:

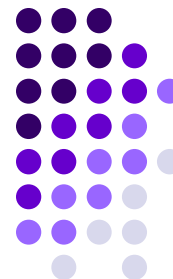
$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^{\max}} \because a_j^{\max} = \max_i(a_{ij})$$

criterii de  
maxim

sau

$$r_{ij} = \frac{a_j^{\max} - a_{ij}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}$$

# Determinarea coeficientilor de importanta



criterii  
de minim

$$r_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^{\max}}$$

sau

$$r_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{\min}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}} \therefore a_j^{\min} = \min_i(a_{ij})$$

**Algoritmul** pentru determinarea coeficienților:

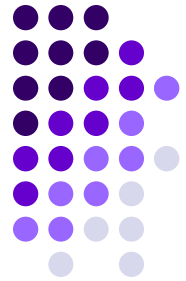
1. Determinarea valorii proprii maxime  $\lambda_{\max}$  - rezolvarea ecuației caracteristice ( $I$  - matricea unitate):

$$\mathbf{det}[B - \lambda \cdot I] = 0$$

2. Rezolvarea sistemului de ecuatii:
 
$$\begin{cases} (B \cdot P^T) = \lambda_{\max} \cdot P^T \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{cases}$$

# Metoda TOPSIS

## Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution



- Ordonarea variantelor – algoritmul de lucru:

- construirea matricii normalizate “R”;
- construirea matricii normalizate ponderate  $V=(v_{ij}) : v_{ij} = p_j \cdot r_{ij}$
- se determină soluția ideală  $V^+$  :

$$v_j^+ = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq m} (v_{ij}) & \text{daca } C_j \text{ este de max} \\ \min_{1 \leq i \leq m} (v_{ij}) & \text{daca } C_j \text{ este de min} \end{cases}$$

- se determina solutia ideala negativă  $V^-$  :

$$v_i^- = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq m} (v_{ij}) & \text{daca } C_j \text{ este de max} \\ \max_{1 \leq i \leq m} (v_{ij}) & \text{daca } C_j \text{ este de min} \end{cases}$$

- se calculează distanța între soluții:

$$S_{i^+} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2}$$

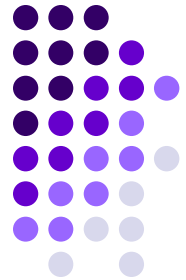
## Ordonarea variantelor

$$S_{i-} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}$$

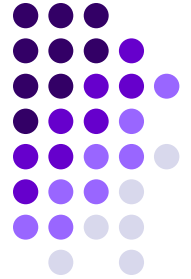
□ se calculează apropierea de soluția ideală:

$$C_i = \frac{S_{i-}}{S_{i+} + S_{i-}}$$

□ se realizează o ierarhizare a variantelor în ordine descrescătoare a criteriilor C



# Metoda AHP (Analytic Hierarchy Process)



• metoda de decizie ierarhică - are la bază patru etape de stabilire a deciziei:  
 **inițierea** – criteriile de definire a deciziei sunt stabilite adesea prin brainstorming sau pe baza decidentului. Relațiile ierarhice între criterii sunt reprezentate sub formă matriceală.

*Exemplul\_1:*

- nivelul 1 se identifică cu problema de decizie abordată
- nivelul 2 se poate referi la preț de cost, fiabilitate, ergonomie etc.
- nivelul 3 ia în considerare o descompunere a celor de la nivelul anterior.

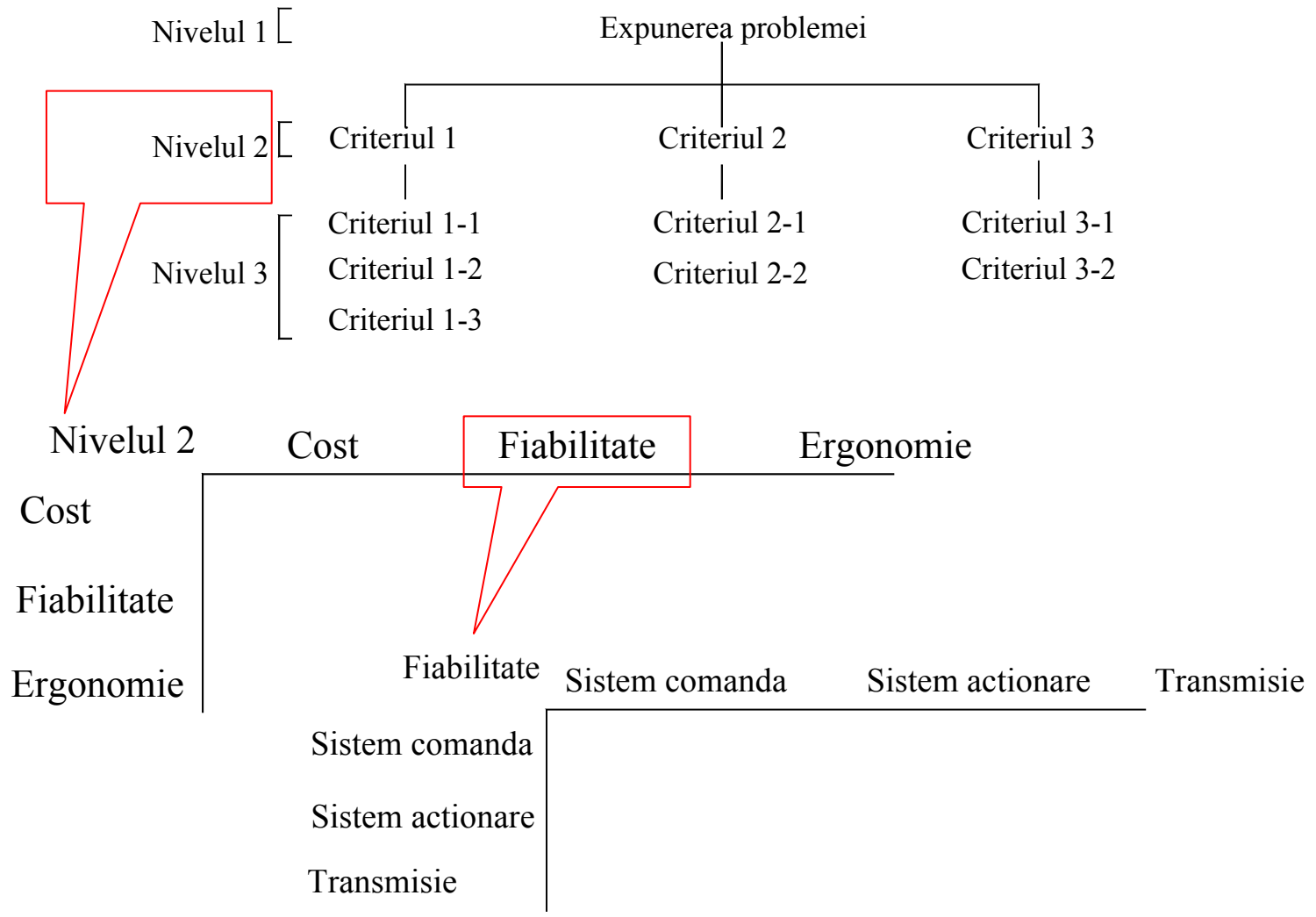
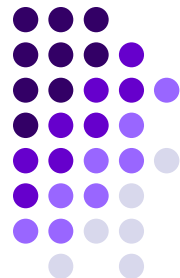
*Exemplul\_2: criteriul **prețul de cost** poate fi divizat în: *prețul de cost de laborator, costuri maxime, costuri variabile.**

**evaluarea** – criteriile introduse în matricile de ierarhizare sunt comparate între ele referitor la importanța relativă;

**ierarhizarea** – soluțiile potențiale sunt ordonate după fiecare criteriu generat în primul pas

**evaluarea finală** – obținerea variantei optime.

# Ierarhizarea criteriilor





## Compararea criteriilor

Nivelul 2	Cost	Fiabilitate	Ergonomie
Cost	1,000	3,000	0,333
Fiabilitate			
Ergonomie			

Nivelul 2	Cost	Fiabilitate	Ergonomie
Cost	1,000	$x = 3,000$	$y = 0,333$
Fiabilitate	$1/x = 0.333$	1,000	$y/x = 0.111$
Ergonomie	$1/y = 3,000$	$x/y = 9,000$	1,000

**OBS.:**

$$b_{ij} = \frac{p_i}{p_j} = \frac{1}{b_{ji}}$$

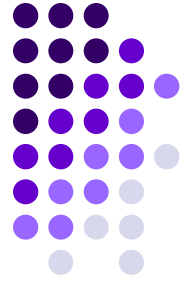
## Vectorul de evaluare

Nivelul 2	Cost	Fiabilitate	Ergonomie	Vector de evaluare
Cost	1,000	$x = 3,000$	$y = 0,333$	$x/(x+y+z) = 23.1 \%$
Fiabilitate	$1/x = 0.333$	1,000	$y/x = 0.111$	$y/(x+y+z) = 7.7 \%$
Ergonomie	$1/y = 3,000$	$x/y = 9,000$	1,000	$z/(x+y+z) = 69.2 \%$

### vectorul de evaluare normalizat - **subcriteriul cost**

Cost	Laborator	Cheltuieli generale	Cheltuieli variabile	Vector evaluare	Vector normalizat
Laborator	1,000	3	5	65.4 %	15.1 %
Cheltuieli generale	0.33	1	1,67	21.6 %	5.00 %
Cheltuieli variabile	0,2	0,6	1	13.1 %	3.00 %
				100 %	23.1 %

# Exemplul\_1

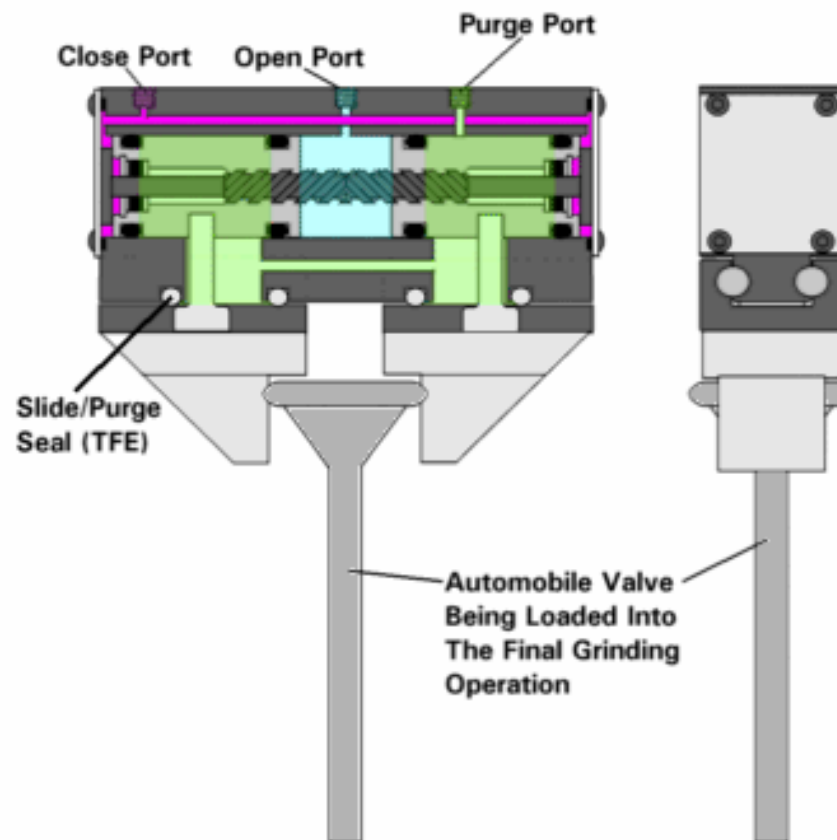


## Problema de rezolvat

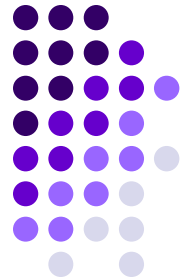
Pentru dotarea unui robot industrial cu un dispozitiv de prehensiune, este necesară alegerea **unei soluții din 3 variante disponibile**

### MAGNUM

<http://www.grippers.com/magnum.htm>

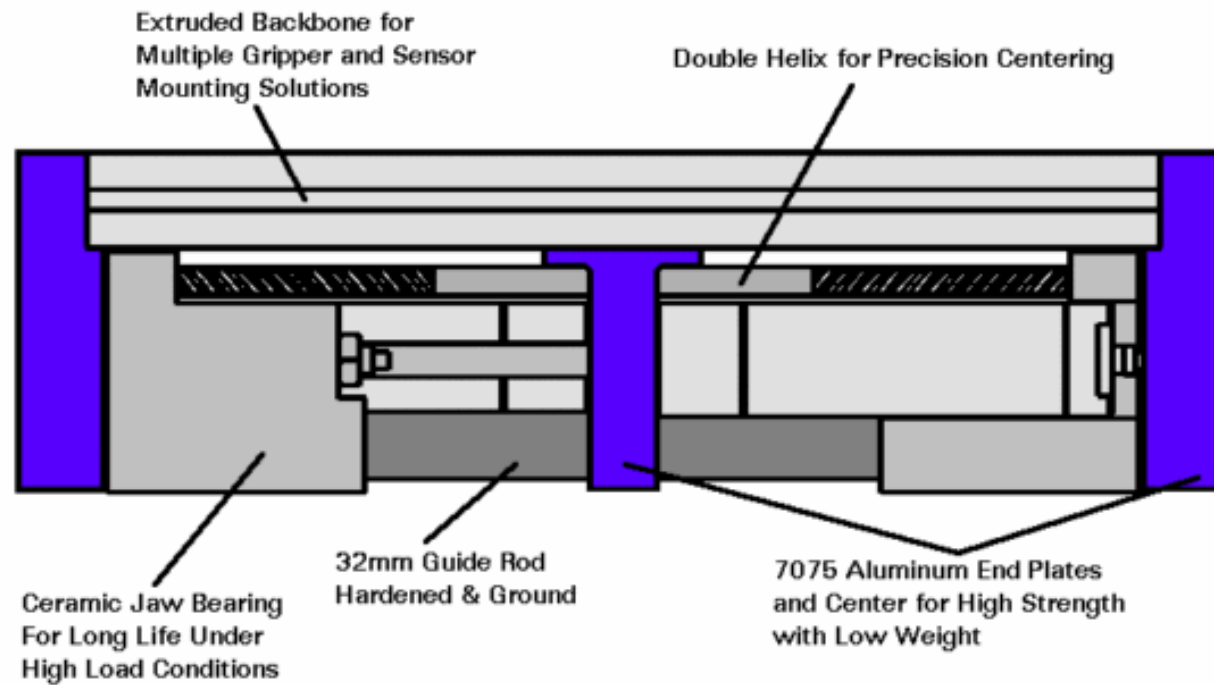


# Exemplul\_1



## XRAY

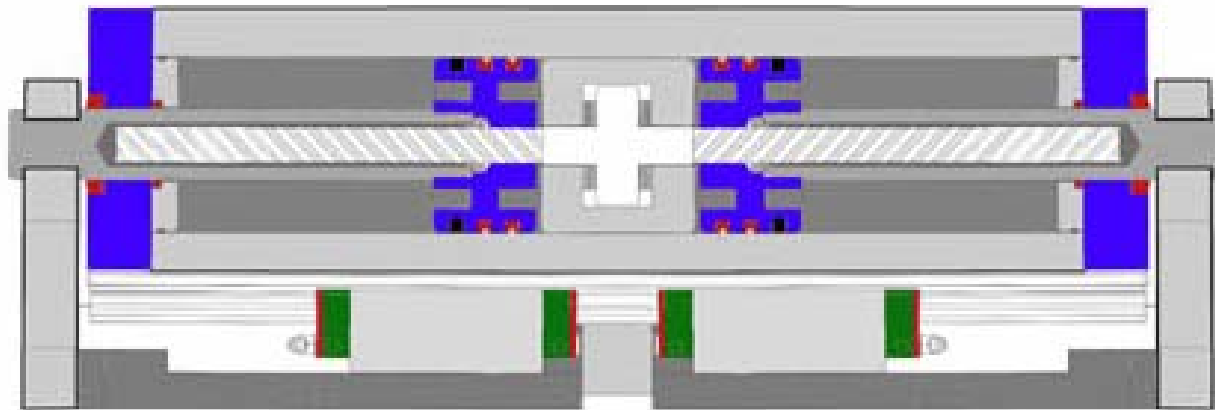
<http://www.grippers.com/xray.htm>



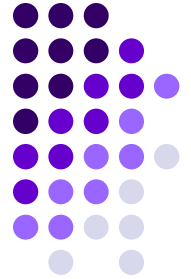
# Exemplul\_1

XRAY\_S

[http://www.grippers.com/xray\\_s.htm](http://www.grippers.com/xray_s.htm)



## Exemplul\_1

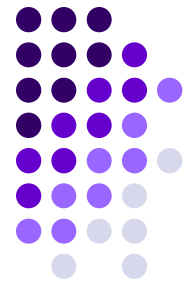


### SOLUTIE

□ Criteriile admise pentru analiza

1. **adaptabilitate** – C1 – criteriu calitativ, de maxim;
2. **dimensiunea minimă prehensată** – C2 – criteriu cantitativ, de minim;
3. **dimensiunea maximă prehensată** – C3 – criteriu cantitativ, de maxim;
4. **greutatea piesei prehensate** – C4 – criteriu cantitativ, de maxim;
5. **precizia** – C5 – criteriu calitativ, de maxim;
6. **volumul gabaritic** – C6 - criteriu cantitativ, de minim;
7. **masa dispozitivului** – C7 – criteriu cantitativ, de minim;
8. **fiabilitatea** – C8 – criteriu calitativ, de maxim;
9. **mentabilitatea** – C9 – criteriu calitativ, de maxim;
10. **costul dispozitivului** – C10 – criteriu cantitativ, de minim.

## Matricea de decizie și matricea consecințelor



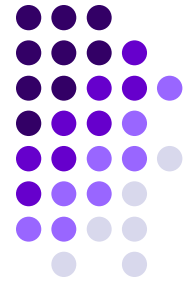
### Matricea de decizie atașată problemei

CRI	<b>C1</b>	<b>C2</b>	<b>C3</b>	<b>C4</b>	<b>C5</b>	<b>C6</b>	<b>C7</b>	<b>C8</b>	<b>C9</b>	<b>C10</b>
VAR.	adaptabilitate [-]	Dmin [mm]	Dmax [mm]	sarcină [kg]	precizie [-]	Volum [m <sup>3</sup> ]	masa [kg]	FIAB. [-]	MENT. [-]	Cost [RON]
<b>V1</b>	medie	5	70	2	B	1.121	2	B	B	2,500
<b>V2</b>	Mare	10	50	1.1	F.B	0.98	1.2	F.B	F.B	3,000
<b>V3</b>	medie	10	60	2.1	B	1.44	1.8	medie	B	2,200

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 70 & 2 & 7 & 1.121 & 2 & 7 & 7 & 2,500 \\ 7 & 10 & 50 & 1.1 & 9 & 0.98 & 1.2 & 9 & 9 & 3,000 \\ 5 & 10 & 60 & 2.1 & 7 & 1.44 & 1.8 & 5 & 7 & 2,100 \end{bmatrix}$$

### Matricea consecințelor

## Determinarea coeficientilor de importanta



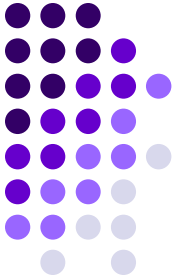
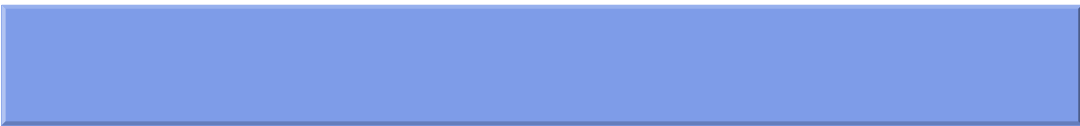
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/7 & 1/5 & 1/3 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1/2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 2 & 2 & 1/3 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 2 & 2 & 1/3 & 2 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/5 & 1/3 \\ 7 & 5 & 5 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1/2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B - \lambda \cdot I_{10}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_{\max} = 10.7658$$

$$\begin{cases} (B - \lambda_{\max} \cdot I_{10}) \cdot P^T = 0 \\ \sum_{i=1}^{10} p_i = 1 \end{cases} \quad \downarrow$$

$$P = [2.5 \cdot 10^{-2} \quad 3.3 \cdot 10^{-2} \quad 3.3 \cdot 10^{-2} \quad 8.7 \cdot 10^{-2} \quad 5.1 \cdot 10^{-2} \quad 5.6 \cdot 10^{-2} \quad 0.16 \quad 0.2 \quad 0.23 \quad 0.13]$$





$$\frac{5}{\sqrt{5^2 + 7^2 + 5^2}}$$

**Matricea normalizata**

$$R = \begin{bmatrix} 0.503 & 0.333 & 0.667 & 0.645 & 0.523 & 0.541 & 0.679 & 0.562 & 0.523 & 0.558 \\ 0.704 & 0.666 & 0.477 & 0.395 & 0.673 & 0.473 & 0.407 & 0.723 & 0.673 & 0.669 \\ 0.503 & 0.666 & 0.572 & 0.677 & 0.523 & 0.695 & 0.611 & 0.402 & 0.523 & 0.491 \end{bmatrix}$$

$$0,503 \times 0.025$$

**Matricea normalizată ponderată**

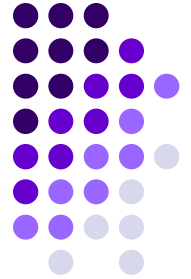
$$V = \begin{bmatrix} 0.013 & 0.011 & 0.022 & 0.056 & 0.027 & 0.030 & 0.108 & 0.113 & 0.118 & 0.071 \\ 0.018 & 0.022 & 0.016 & 0.031 & 0.035 & 0.027 & 0.064 & 0.145 & 0.152 & 0.085 \\ 0.013 & 0.022 & 0.019 & 0.059 & 0.027 & 0.039 & 0.097 & 0.081 & 0.118 & 0.062 \end{bmatrix}$$

**Soluția ideală pozitivă și cea negativă**

$$V^+ = [0.018 \quad 0.011 \quad 0.022 \quad 0.059 \quad 0.035 \quad 0.027 \quad 0.065 \quad 0.145 \quad 0.152 \quad 0.062]$$

$$V^- = [0.013 \quad 0.022 \quad 0.016 \quad 0.031 \quad 0.027 \quad 0.039 \quad 0.108 \quad 0.081 \quad 0.118 \quad 0.085]$$

## Varianta optima



### Distanțele eculidiene între soluții

$$S_1^+ = 0.065 \quad S_1^- = 0.046$$

$$S_2^+ = 0.03826 \quad S_2^- = 0.086$$

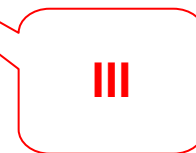
$$S_3^+ = 0.03379 \quad S_3^- = 0.037$$

### Coeficienții de ordonare a variantelor

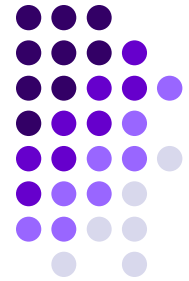
$$C_1 = \frac{S_1^-}{S_1^+ + S_1^-} = \frac{0.046}{0.064 + 0.046} = 0.41$$

$$C_2 = 0.69$$

$$C_3 = 0.52$$



## Exemplul\_2



### PROBLEMA DE REZOLVAT

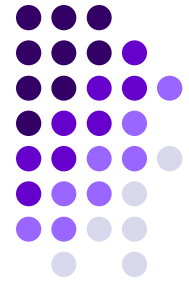
Se consideră 4 variante de MGT pentru un robot industrial de montaj.  
**Care este varianta cea mai buna ?**

### SOLUTIE

CRITERII VAR.	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	GREUTATE [kg]	SARCINA [kg]	SPATIU LUCRU [m <sup>3</sup> ]	PRECIZIE [mm]	VITEZA PCT. C. [m/s]	COST [RON]	FIAB. [-]	MENT. [-]
<b>V1</b>	40	3	0.5	0.5	0.5	165.000	B	F.B
<b>V2</b>	70	5	0.5	0.05	1.0	180.000	B	B
<b>V3</b>	60	7	0.7	0.05	0.8	150.000	F.B	F.B
<b>V4</b>	50	6.5	0.2	0.1	0.7	200.000	F.B	F.B

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 3 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 165,000 & 7 & 9 \\ 70 & 5 & 0.5 & 0.05 & 1 & 180,000 & 7 & 7 \\ 60 & 7 & 0.7 & 0.05 & 0.8 & 150,000 & 9 & 9 \\ 50 & 6.5 & 0.2 & 0.1 & 0.7 & 200,000 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

## Exemplul\_2



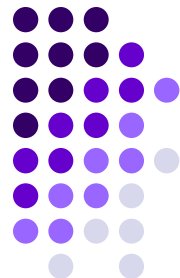
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 1/7 & 1/7 & 1/2 & 1/5 & 1/5 \\ 5 & 1 & 3 & 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1/5 & 1/5 \\ 3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1/3 \\ 7 & 2 & 3 & 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 7 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = 8.55458$$

$$P = \left[ 2.8 \cdot 10^{-2} \quad 7.4 \cdot 10^{-2} \quad 5.37 \cdot 10^{-2} \quad 0.13 \quad 0.17 \quad 0.091 \quad 0.21 \quad 0.25 \right]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.356 & 0.268 & 0.492 & 0.971 & 0.324 & 0.472 & 0.434 & 0.526 \\ 0.623 & 0.446 & 0.492 & 0.097 & 0.648 & 0.515 & 0.434 & 0.409 \\ 0.534 & 0.625 & 0.689 & 0.097 & 0.518 & 0.429 & 0.558 & 0.526 \\ 0.445 & 0.581 & 0.197 & 0.194 & 0.453 & 0.572 & 0.558 & 0.526 \end{bmatrix}$$

# Exemplul\_2



$$V = \begin{bmatrix} 0.0099 & 0.0198 & 0.0264 & 0.1262 & 0.055 & 0.0429 & 0.091 & 0.131 \\ 0.0174 & 0.0330 & 0.0264 & 0.0126 & 0.110 & 0.0468 & 0.091 & 0.102 \\ 0.0148 & 0.0460 & 0.0369 & 0.0126 & 0.088 & 0.0390 & 0.117 & 0.131 \\ 0.0124 & 0.0429 & 0.0105 & 0.0252 & 0.077 & 0.0520 & 0.117 & 0.131 \end{bmatrix}$$

$$V^+ = [0.0099 \quad 0.046 \quad 0.0369 \quad 0.0126 \quad 0.11 \quad 0.039 \quad 0.117 \quad 0.131]$$

$$V^- = [0.0174 \quad 0.0198 \quad 0.0105 \quad 0.1262 \quad 0.055 \quad 0.052 \quad 0.091 \quad 0.102]$$

$$S_1^+ = 0.1319 \quad S_2^+ = 0.0437 \quad S_1^- = 0.0351 \quad S_2^- = 0.05898$$

$$S_3^+ = 0.02256 \quad S_4^+ = 0.04641 \quad S_3^- = 0.0645 \quad S_4^- = 0.11296$$

$$C_1 = 0.21 \quad C_2 = 0.574 \quad C_3 = 0.7408 \quad C_4 = 0.7099$$

IV
III
I
II