

## 8 MODELAREA ȘI SIMULAREA SISTEMELOR MECATRONICE

### 8.1. Introducere

Evoluția umanității este intrinsec legată de evoluția modalităților prin care omul a reușit să desfășoare activități specifice având drept finalitate cunoașterea. Cunoștințele dobândite într-un anumit domeniu au putut fi apoi valorificate pentru ceea ce se poate denumi “progres al civilizației”

Dacă cunoașterea despre care facem referire este *cunoașterea științifică* atunci mijloacele prin care s-au desfășurat procese de activitate se pot diviza în două [8.29]:

- Mijloace care țin de interacțiunea, directă sau indirect mijlocită de instrumente, cu aspectul interesat, caz în care se afirmă că este vorba de cunoașterea empirică, senzorială. În sfera de activitate informativă acest lucru este echivalent cu *culegerea datelor, a informațiilor* care se referă la obiectul sau fenomenul avut în vedere. Metodele prin care se realizează acest lucru sunt *observarea, descrierea, măsurarea*. Formele prin care se reflectă cunoștințele sunt *senzațiile, percepțiile, reprezentările*.
- Mijloacele de pătrundere ale fenomenului, a legităților care guvernează aspectul analizat. Desfășurate cu ajutorul gândirii aceste mijloace constau din prelucrarea datelor cu metodele specifice: *analiza, sinteza, deducția, inducția*. Formele de reflexie a cunoștințelor sunt: *noțiunile, categoriile, judecățile, raționamentele, ipotezele, teoriile*.

### 8.2. Conceptul de model, modelare și simulare

#### 8.2.1. Introducere

Observarea și măsurarea au constituit principalele mijloace prin care s-au desfășurat activități de cunoaștere.

Prin apariția teoriei sistemelor s-au deschis căile apariției și dezvoltării *modelării*.

Teoria sistemelor oferă aspectului studiat trăsături de generalitate cu caracter de sistem. Din acest moment datele / informațiile cu care se opera pe treapta cunoașterii

devin date de intrare / ieșire ale sistemului studiat.

**De ce fără experiment** într-un sistem? Se pot menționa o serie de cauze:

- este prea costisitor;
- este prea periculos – sisteme greu accesibile cu grad înalt de pericol;
- este imposibil – sistemul nefiind construit.

**Care este în acest caz soluția ?**

- Se realizează un model matematic pentru sistemul în cauză pe baza aspectelor – caracteristicilor esențiale, utilizabile și adecvate din sistem și utilizând legile fizicii, biologiei, economiei etc.
- Analizează și simulează ecuațiile modelului rezolvând sistemul de ecuații (manual sau automat). Etapa este esențială pentru cunoașterea comportamentului unui sistem pe baza comportamentului oferit de model.

**Rezultatul ....**

- Costul simulării este aproximativ zero, dar ...
- ...utilitatea simulării depinde cât de apropiat de sistemul real este modelul construit; Realizarea unui model corect este o artă.

Generalizarea aspectelor prezentate sunt sugerate sugestiv în schema logică din figura 8.1

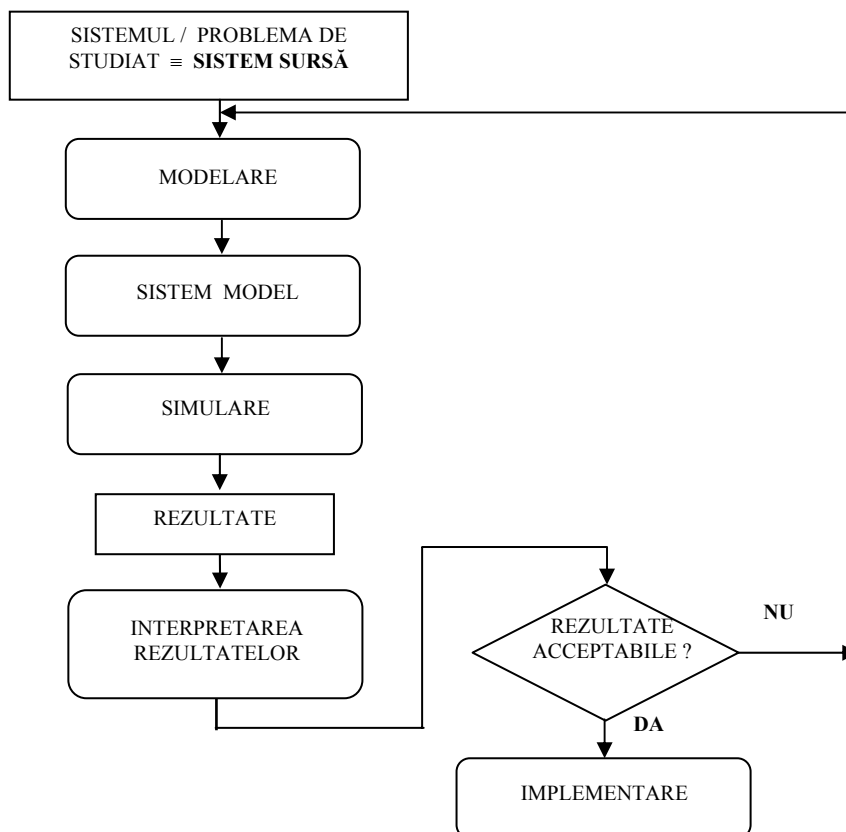


Fig. 8.1 Schema logică de integrarea simulării

### 8.2.2. Model, modelare și simulare

De ce modele ? Compactizarea conținutului unor cunoștințe, cercetarea, comunicarea eficientă, educația, modelarea pentru control, modelarea pentru proiectare sunt câteva din argumentele pentru model / modelare.

Figura 8.2 pune în evidență, într-o formă simplistă, semnificația noțiunii de modelare.

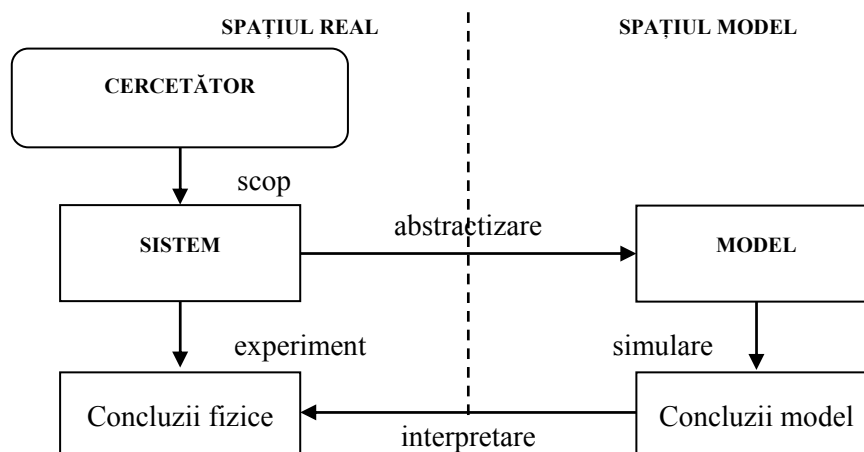


Fig. 8.2 Spațiul real și spațiul model

Construirea modelului se poate baza pe două principii (fig.8.3):

- Există cunoștințe și intuiție despre sistem (*white box component*);
- Există date experimentale – intrare / ieșire - din sistem (*black box component*).

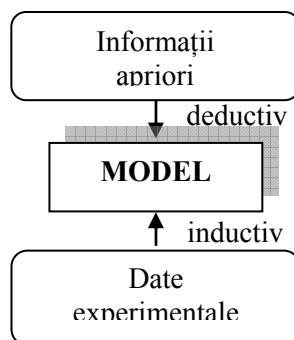


Fig. 8.3 Construcția modelului

Clasificarea modelelor poate fi abordată pe baza mai multor criterii repartizate în două categorii, funcție de ponderea reprezentată: *ponderea de model sau cea de sistem* [8.29]. În prima categorie se pot include aspectul de esență (configurație geometrică sau comportament), materialitatea (abstract, ideal sau material, fizic), natura (conceptual, informațional, similar, analog) și structura (sintetic, structurat). Din a doua categorie se pot menționa: variația în timp ca semnal (continuu, discret, discontinuu), mod de descriere (orientat pe ecuații, orientat pe blocuri), predictibilitate (stochastic,

determinist), variația în timp a parametrilor (static, dinamic), liniaritatea operatorilor (linear, neliniar).

Clasificări ale modelelor și ale domeniilor de utilizare aferente sunt prezentate în figura 8.4[8.21].

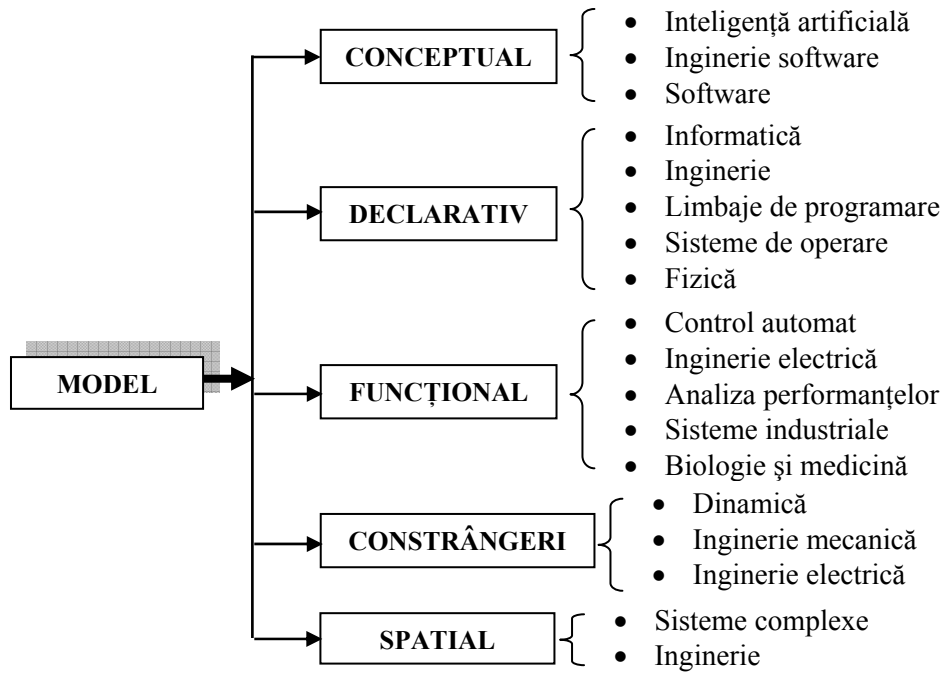


Fig. 8.4 Clasificare a modelelor și domenii de utilizare

*Cercetarea*, în general, are ca scop dobândirea unor cunoștințe noi asupra unui sistem, relevarea unor aspecte necunoscute, urmând ca acestea să fie eventual utilizate pentru:

- Soluții adecvate noi pentru rezolvarea aspectelor amintite;
- Interpretări noi asupra cunoștințelor sau datelor obținute;
- Operații de diagnosticare;
- Dobândirea de cunoștințe noi în domenii conexe.

Funcție de modul de reprezentare a modelelor se pot menționa destinațiile acestora (fig.8.5) și o altă ierarhizare a lor (fig. 8.6 [8.23]).

UTILIZĂRI ALE MODELĂRII	
• Intuiție și înțelegere	• Sinteza sistemelor de comandă
• Analiză	• Instruire operator
• Simulare	• Rapid prototyping
• Optimizarea proiectării	• Diagnoză și detectarea defectelor
• ....	• .....

Fig. 8.5 Destinații ale modelării în cercetare

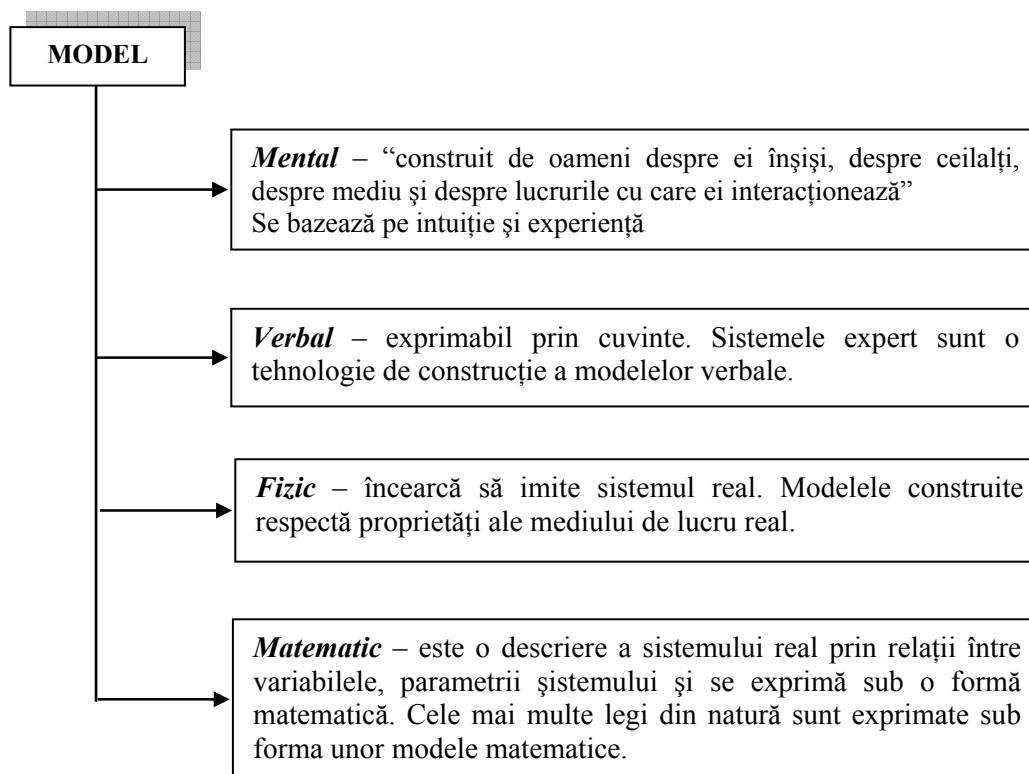


Fig. 8.6 Modele și reprezentarea lor

*Proiectarea* se poate finaliza și printr-un produs sau proces – nou sau sporirea performanțelor unuia existent (fig.8.7).

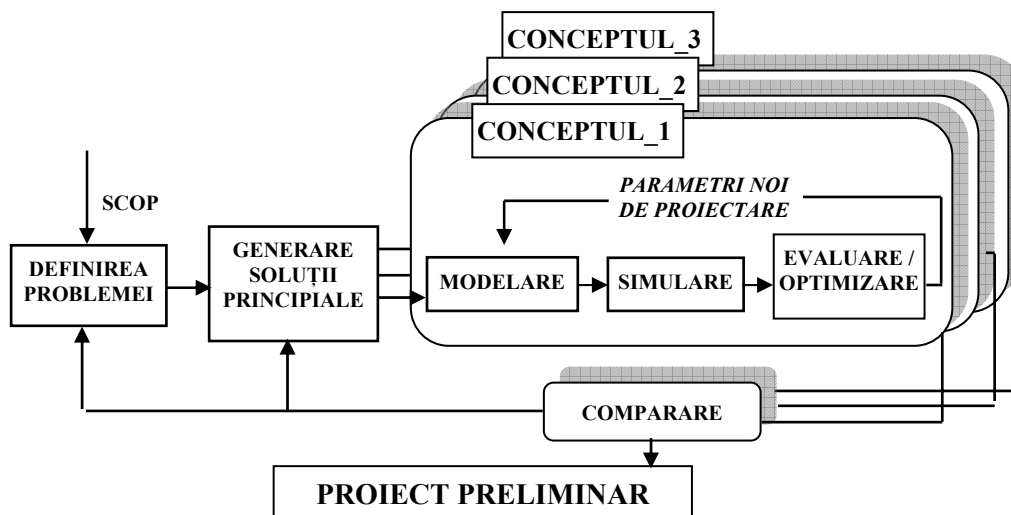


Fig. 8.7 Procesul de proiectare și modelarea

Modelele și respectiv simularea pentru această activitate înseamnă reducerea perioadei de analiză, creșterea productivității în proiectare. Pe baza scopului urmărit și a definirii problemei de rezolvat se definește lista de cerințe pentru proiect și ca urmare se generează soluții principale. După selectarea conceptelor de lucru urmează etapele modelare / simulare / optimizare care vor defini proiectul preliminar. Pe parcursul etapei modelare / simulare pot apărea parametri de proiectare suplimentari [8.1].

Etapele esențiale ale procesului de modelare fizică sunt (fig.8.8):

- **Definirea nivelurilor de abstractizare:** deciziile sunt necesare în prima și a doua succesiune în modelare.
- **Alegerea metodei de descriere:**
  - Descriere comportare: orientat pe ecuații, ecuații diferențiale (ODE);
  - Descriere structurală: sistemul este descris din subsisteme și elemente de bază (primitive) compatibile cu simulatorul.

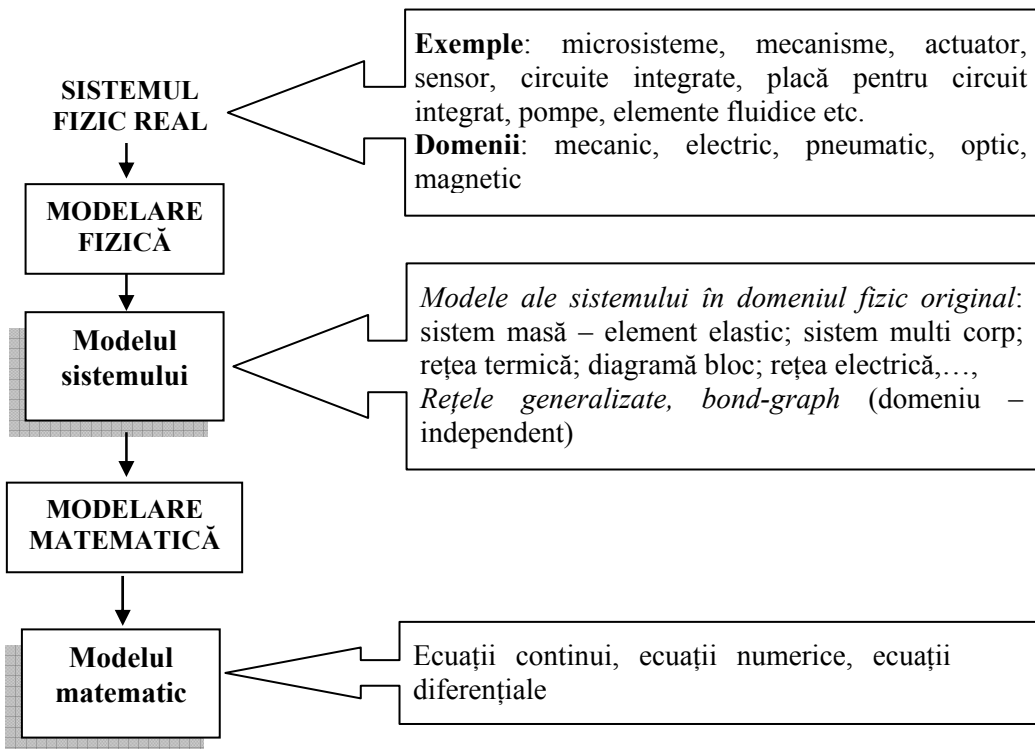


Fig. 8.8 Etape în procesul de modelare a sistemelor fizice

Multe din ecuațiile utilizate sunt ecuații algebrice diferențiale neliniare (DAE).

- **Definirea interfeței:** se clasifică porturile în categoria *conservative* sau *neconservative*
  - **Definirea proprietăților semnalelor:** continue, discrete.
- Conducerea** proceselor industriale implică calculul mărimilor de comandă care

să asigure desfășurarea optimă a procesului.

Procesele industriale sunt caracterizate de fluxuri de materiale, energie și informație introduse în instalația tehnologică în vederea prelucrării corespunzătoare și a obținerii unor fluxuri de materiale, informație și energie după prelucrare. Pentru procesul analizat este nevoie de modelul matematic al acestuia. Modelul matematic – static pentru procese cu parametri concentrați sau distribuiți, dinamic pentru procese liniare sau neliniare – exprimă numai aspectele care interesează privitor la procesul respectiv. Suma condițiilor care se impun mărimilor de ieșire poartă denumirea de *algoritm de funcționare*.

Conducerea procesului tehnic cumulează suma operațiilor efectuate în vederea stabilirii, pentru procesul tehnic în cauză, a algoritmului de funcționare. Chiar dacă se cunosc ecuațiile care guvernează sistemul, există de obicei și parametri necunoscuți. De aceea activitatea de proiectare a sistemului de reglare este în permanentă și strânsă corelație cu activitatea de identificare, apelând la acea latură care, prin efectuarea de experimente, oferă cunoștințele care lipsesc. În final, trebuie obținute modelele parametrice necesare.

Acțiunea de conducere a unui sistem depinde astfel de cunoașterea acestuia. Se pot deosebi:

- Condiții de funcționare normale; reglare cu legătura inversă sau directă, tipuri de optimizare statică, optimizare dinamică, reglare adaptivă, reglare intermitentă;
- Situații de urgență – avarie parțială – când acțiunea de comandă depinde de informația asupra tipului și gradului de avarie;
- Situațiile de pornire și oprire, când anumite trepte ale schemei de programare pot să depindă de valorile parametrilor sau variabilele sistemului.

O etapă esențială în construcția modelelor este *identificarea*. Zadeh definește *identificarea* drept determinarea, pe baza intrării și ieșirii, a unui sistem dintr-o clasă determinată de sisteme, față de care sistemul care se încearcă este echivalent [8.20].

Experimentatorul, în multe cazuri, a dobândit apriori unele cunoștințe printr-o înțelegere fizică a procesului ce se examinează. Acestea pot da informații asupra structurii unui model conceptual pentru acel proces și probabil chiar o cunoaștere aproximativă a parametrilor acestui model.

Costul efectiv de încorporare a electronicii, computerelor și elementelor de control în sistemul mecanic necesită noi căi pentru proiectare.

Beneficiile deosebite se pot obține printr-o proiectare judicioasă. Care este cheia succesului în noua filozofie de proiectare ? În mod sugestiv succesul se exprimă prin echilibrul dintre modelare & analiză și validare experiment & construcție (fig.8.9)

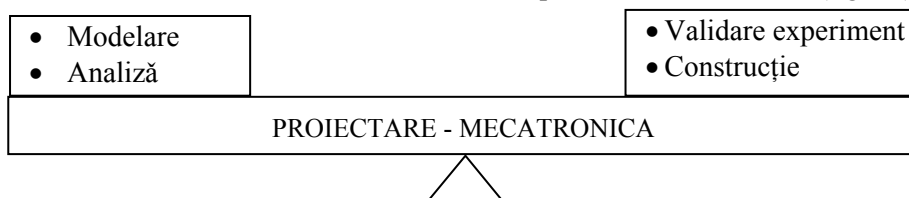


Fig. 8.9 Echilibru în proiectare

Investigarea sistemelor dinamice mecatronice în faza de proiectare respectă

schema logică prezentată în figura 8.10.

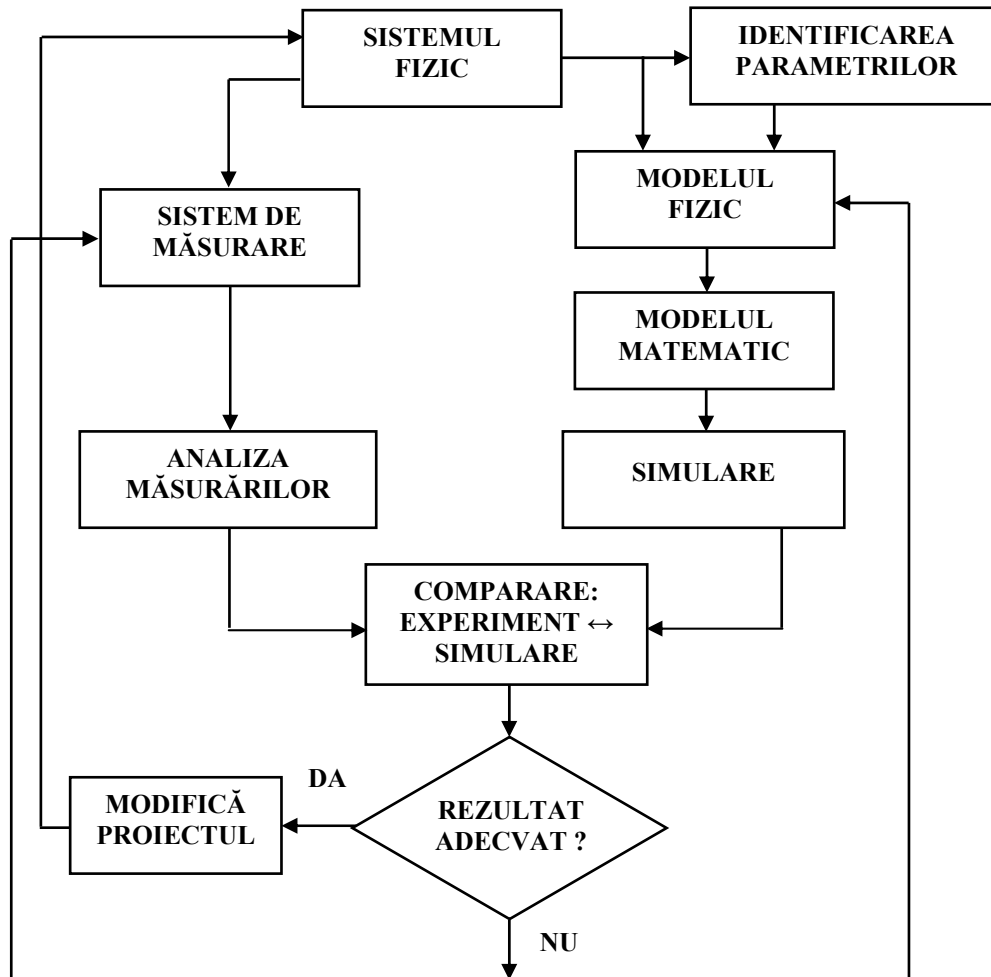


Fig. 8.10 Investigarea sistemelor dinamice

Avem nevoie de un model pentru comportare statică sau comportare dinamică, a unui model complet neliniar sau liniarizat? Răspunsul la întrebare poate să implice criterii privind precizia dorită, abordarea dinamică sau statică etc. Modelul trebuie realizat separat de proces – cu hârtia și creionul – plecând de la legi fundamentale și experimente izolate, sau se poate lucra în cadrul procesului când ni se permite să efectuăm experiențe cu procesul existent? Ce considerații economico-financiare trebuie avute în vedere?

Din acest moment numărul de întrebări crește exponențial și problema se complică. Iată câteva dintre alte întrebări posibile:

- Cum se va aprecia calitatea modelului?
- Cum se vor folosi în model toate cunoștințele pertinente?
- Care este strategia optimă pentru a obține cunoștințele care lipsesc?



- Cum se vor trata neliniaritățile ?
- Cum se poate exprima un sistem complex printr-unul simplu ?

Semnificația noțiunii de *simulare* este corelată cu cea de model / modelare și diferă în funcție de contextul domeniului în care se utilizează. Din multitudinea de definiții, am ales două care le considerăm că exprimă cel mai bine conținutul conceptului:

- Un proces de imitare a unui fenomen real pe baza unui set de formule matematice [8.29], [8.46].
- Funcționarea / operarea unui model în aceeași manieră ca un sistem dat când acesta este caracterizat de un set de intrări [8.47].

Literatura de specialitate nu evidențiază o clasificare propriu-zisă a activităților de simulare. Se fac totuși și unele distincții în funcție de [8.29]:

- Tipul calculatorului utilizat: analogic, digital, hibrid;
- Natura sistemului – economic, tehnic, etc.- simulat;
- Desfășurarea în timp a fluxului de semnale: continuă, discretă, mixtă.

În figura 8.11 se prezintă un mod de ierarhizare a « uneltelor » utilizate în procesul de simulare [8.35].

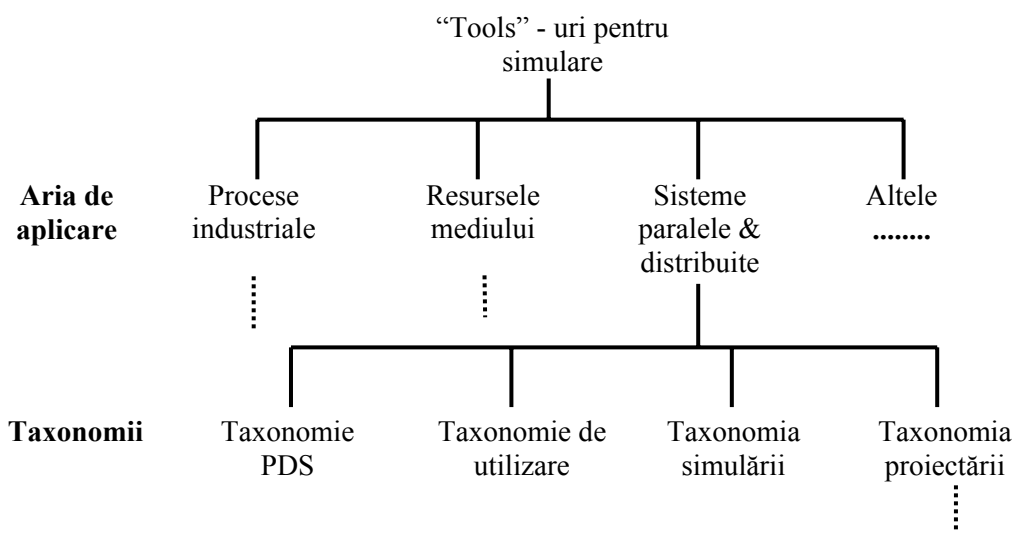


Fig. 8.11 Ierarhizarea tools-urilor de simulare

### 8.3. Modele matematice

#### 8.3.1. Sistem, stare, intrări, ieșiri

O altă definiție a sistemelor este cea de sistem termodinamic: porțiune din univers pentru care se poate delimita un “interior” și un “exterior”, interiorul conținând un număr oarecare de corpuri macroscopice, considerate ca având o structură fizică continuă [8.40]. Caracterizarea acestor sisteme se realizează prin stările lor termodinamice, reprezentate ca o mulțime de parametri, care descriu aspecte interne ale sistemului și relațiile cu mediul înconjurător (exteriorul sistemului).

Tranziția de stare a unui sistem termodinamic este denumită proces fizic. Noțiunea de “*stare*” reprezintă o noțiune care s-a dovedit în decursul timpului extrem de recomandată pentru înțelegerea naturii sistemelor dinamice. De exemplu, pentru un sistem termic trecerea, dintr-o stare de echilibru în altă stare de echilibru, poartă denumirea de proces. Exemplu de variabile de stare: masa, temperatura, volumul, presiunea, densitatea, entropia etc.

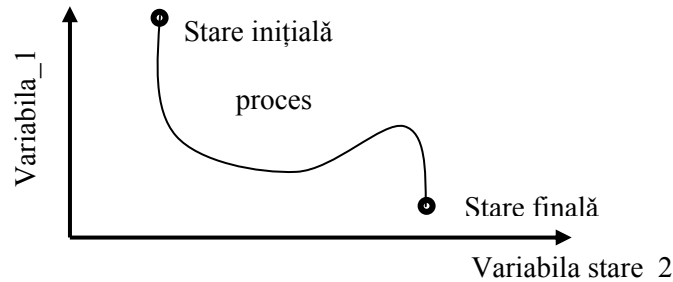


Fig. 8.12 Proces, stare și variabilă de stare

O conexiune esențială dintre inginerul proiectant / analist și sistemul real constă în abilitatea primului de a găsi metodele și “uneltele” de a descrie sistemul în mod eficient scopului urmărit.

Un model simplu pentru un sistem este prezentat în figura 8.13. O astfel de reprezentare este convenabilă pentru un sistem static a cărui ieșire depinde doar de intrarea sa curentă.



Fig. 8.13 Sistem static

În orice descriere modelul este elementul cheie. În același timp trebuie subliniat faptul că această descriere nu este unică. Un rol aparte, din punctul de vedere al mecatronicii, îl joacă descrierea dinamicii sistemului.

Ce se înțelege însă prin sistem dinamic, în general, și în ce mod poate fi descrisă comportarea dinamică a acestuia cu ajutorul variabilelor de stare ?

Un sistem dinamic poate fi caracterizat prin:

- una sau mai multe mărimi de intrare variabile în timp  $u_i(t)$  care formează intrarea sistemului;
- una sau mai multe mărimi de ieșire variabile în timp,  $y_j(t)$  care formează ieșirea sistemului;
- ecuație diferențială care leagă variabilele de stare  $x_n(t)$  de derivatele acestora, de mărimile de intrare  $u_i(t)$  și perturbația  $v(t)$ ;
- o ecuație de ieșire, care leagă mărimile de ieșire  $y_j(t)$  de variabilele de stare  $x_n(t)$  și de mărimile de intrare  $u_i(t)$ .

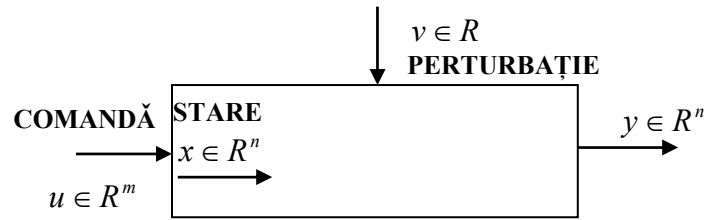


Fig. 8.14 Sistem dinamic

Se definește sistemul simplu ca și sistemul descris matematic sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u, v, t) \\ y &= g(t, x, u) \end{aligned} \tag{8.1}$$

în care nu există nici o conexiune de tip reacție inversă.

Ecuția diferențială de stare și ecuația de ieșire formează împreună modelul matematic al sistemului dinamic. Un astfel de model este capabil să descrie orice sistem dinamic cu parametri constanți. Condiția necesară este ca ecuația diferențială propriu zisă să descrie corect legile fizice care guvernează sistemul.

### 8.3.2. Categoriile de modele matematice

În modul de descriere a unui sistem se specifică că acesta are la bază elemente între care există o serie de relații de dependență și interacțiune. Aceste aspecte sunt descrise printr-un set de ecuații bazate pe variabilele interne ale sistemului. Aceste variabile sunt denumite drept *variabile de stare* ale sistemului. Alegerea variabilelor de stare nu este unică.

Fie  $\mathbf{x}$  un vector care în particular descrie starea sistemului. Forma matematică a modelului variabilelor de stare este în acest caz:

- **Modele continue în timp:**

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{aligned} \tag{8.2}$$

unde  $\mathbf{u}(t)$  este vectorul de intrare iar  $\mathbf{y}(t)$  este vectorul de ieșire.

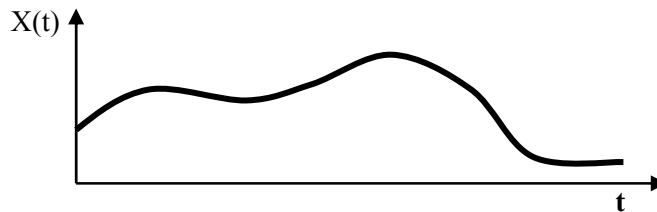


Fig. 8.15 Model continuu în timp

- **Modele discrete în timp** (Fig.8.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[t+1] &= \mathbf{F}_d(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t], t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}_d(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t], t) \end{aligned} \quad (8.3)$$

unde notațiile sunt similare cazului anterior iar [#] descrie partea întreagă a parametrului #.

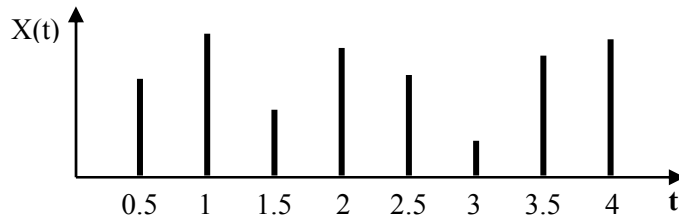


Fig. 8.16 Model discret în timp

- **Modele cu evenimente discrete** (Fig.8.17).

Informația din sistem poate avea și o formă de reprezentare logică. Aceste sisteme poartă denumirea de sisteme cu evenimente discrete.

De exemplu, dinamica sistemelor flexibile de fabricație este determinată de interacțiunea în timp a diverselor componente (resurse, activități) a caror coordonare este strans legată de noțiunea de eveniment lansare / terminare activitate, defectare / reparare resursa, sosire / plecare piesă, etc). Prin urmare SFF sunt conduse de evenimente și deseori asincrone, distribuite, nedeterministe, dezvoltând activități secvențiale (ordonate), concurente (paralele), competitive (conflictuale - acces simultan la resurse) și coordonate între componentele lor (sincronizarea accesului la resursele cerute de un anumit proces). De aceea ele se situează alături de sistemele distribuite concurente, sistemele de operare, rețelele de comunicație și mașinile inteligente și fac parte din clasa *sistemelor dinamice cu evenimente discrete*.

Evenimentele sunt identificate cu: acțiuni spontane (start operație); modificări necontrolabile în funcționarea normală a procesului (defecte); rezultatul satisfacerii simultane a mai multor condiții.

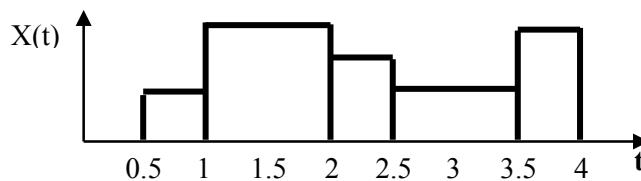


Fig. 8.17 Model cu evenimente discrete

Clasificarea modelelor matematice poate avea ca punct de pornire și alte criterii de clasificare. Unul dintre aceste criterii este cel de *reprezentare spațială a sistemului*. Clasificarea include *modele cu parametri distribuiți* și *modele cu parametri concentrați*.

O clasificare a modelelor și modul de reprezentare matematică a acestora prin ecuații liniare și neliniare, parametri concentrați și distribuiți, etc. este prezentată în tabelul 8.1.

Tabelul 8.1

MODELUL MATEMATIC	CLASIFICAREA SISTEMULUI
$\mathbf{x} = \mathbf{x}(z)$	Static
$\mathbf{x} = \mathbf{x}(z, t)$	Dinamic
$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 2\mathbf{x}(t)$	Liniar, coeficienți constanți, parametri concentrați, neforțat
$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 2\mathbf{x}^3(t)$	Nelinier, coeficienți constanți, neforțat, parametri concentrați
$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 2\mathbf{x}(t) + 2t$	Liniar, coeficienți constanți, forțat, parametri concentrați
$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (2t + 3) \cdot \mathbf{x}^2(t) + t$	Nelinier, coeficienți variabili, forțat, parametri concentrați
$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 3\mathbf{x}^2(t) + e^{-2t} + f(t)$	Nelinier, coeficienți constanți, forțat, parametri concentrați
$\frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(z, t)}{\partial t^2} + \mathbf{x}(z, t)$	Liniar, coeficienți constanți, neforțat, parametri distribuiți

### 8.3.3. Modalități de reprezentare a modelelor matematice

#### 8.3.3.1. Dezvoltarea modelului dinamic

În etapa de analiză a sistemului, construcția modelului se încadrează într-o succesiune de etape rezultând în final modelul matematic asociat sistemului fizic.

- *Definirea “granițelor” sistemului.* Toate sistemele fizice lucrează în interacțiune cu alte sisteme. Din acest motiv este necesar să se definească aceste granițe.
- *Definirea ipotezelor simplificatoare / a aproximațiilor admise.* Modelul trebuie să includă ce este esențial din sistemul fizic. Dacă sistemul este prea complicat utilitatea sa devine discutabilă.
- *Stabilirea ecuațiilor de echilibru / bilanț pentru sistemul fizic (sau pentru subsistemele componente) și definirea condițiilor suplimentare.*

Echilibrul energetic – *energy balance* – poate avea o interpretare fizică și una filozofică. Interpretarea fizică a echilibrului are semnificații specifice domeniului de aplicație: *fizică, biologie, inginerie, economie*, etc.

Energia unui sistem fizic este o mărime fizică de stare, caracterizând sistemul într-o stare staționară. Din energia totală a unui sistem se pot separa anumite forme de energie, care depind de o anumită clasă de mărimi de stare – mărimi mecanice, electrice, magnetice etc. Modificarea stării unui sistem fizic este denumită transformare. Fiecare transformare conduce la modificarea valorii diferitelor forme de energie care caracterizează sistemul fizic. În conformitate cu cele specificate în *fizică*, bilanțul energetic este o prezentare sistemică a fluxului energetic și a transformărilor din sistem. Baza teoretică este prima lege a termodinamicii: “ Variația energiei interne

$\Delta W_i$  a unui sistem fizic, la trecerea dintr-o stare în alta  $W_2 - W_1$  este egală cu suma dintre variația lucrului mecanic  $\Delta L$  și variația cantității de căldură  $\Delta Q$  schimbată de sistem cu exteriorul”.

Într-o formă generalizată, bilanțul “material” se poate exprima prin: “*rata de schimb a materiei în sistem este egală cu fluxul net a materialului*” (fig.8.18).

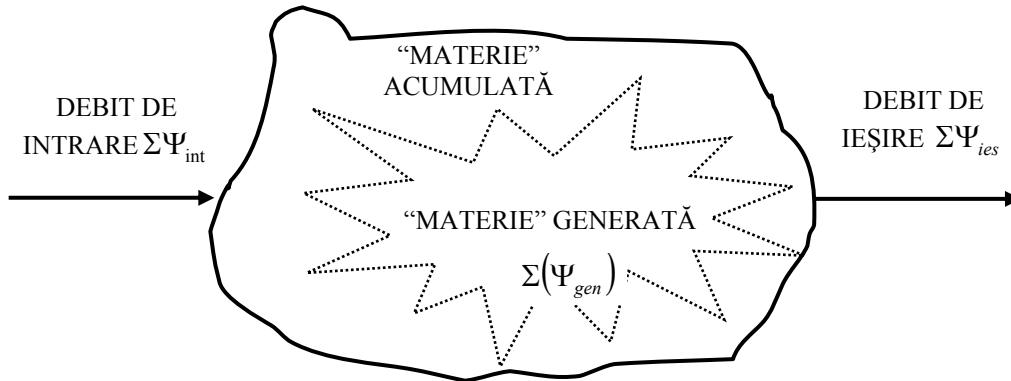


Fig. 8.18 Bilanțul “material”

Termenul de “materie” are o semnificație generalizată definind energie, masă, impuls. Fluxul net este suma algebrică între fluxul de intrare și cel de ieșire la care se adaugă “materia” generată în sistem (de ex.: generare de energie prin reacții chimice).

$$\frac{d(\text{"material"})}{dt} = \Sigma(\Psi_{\text{int}}) - \Sigma(\Psi_{\text{ies}}) + \Sigma(\Psi_{\text{gen}}) \quad (8.4)$$

În domeniul mecanic, multe probleme de analiză se rezolvă folosind teoremele bilanțului / echilibrului energetic / căldură, echilibrului de masă, echilibrului impulsului, echilibrului entropiei.

Ecuția fundamentală a dinamicii unui rigid, sub acțiunea unor solicitări reale – exterioare active, exterioare pasive și interioare - are o formă recunoscută:

$$dm \cdot \bar{a} = dF_a + dF_p + dF_{\text{int}} \quad (8.5)$$

Această ecuație conduce, prin unele transformări la o serie de teoreme fundamentale ale dinamicii rigidului:

- *Teorema energiei sub forma generală:*

$$\frac{dE}{dt} = P_a + P_p \quad (8.6)$$

cu următoarea formulare: derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unui rigid în mișcare este egală cu suma puterilor mecanice ale tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus rigidul.

Notând cu  $E_c$  **energia cinetică** a sistemului la un moment dat  $t$ , *teorema energiei*

*cinetice* sub formă diferențială se scrie sub forma:

$$dE_c = dL \quad (8.7)$$

ceea ce înseamnă că variația elementară a energiei cinetice a sistemului are loc prin intermediul lucrului mecanic elementar al tuturor forțelor ce acționează asupra sistemului la momentul  $t$ : forțe elastice, forțe de amortizare, forțe perturbatoare.

Legea energiei cinetice se poate formula în mod matematic sub forma:

$$d(E_c + E_p) = dE_m = dL' \quad (8.8)$$

unde  $E_m = E_c + E_p$  este energia mecanică a sistemului. Variația elementară a energiei mecanice are loc prin intermediul lucrului mecanic elementar al forțelor de amortizare și perturbare ce acționează asupra sistemului [8.26], [8.40].

- *Teorema conservării energiei mecanice* se poate scrie sub forma:

$$E_m = E_c + E_p = E_{c0} + E_{p0} = \text{const.} \quad (8.9)$$

- *Teorema impulsurilor sub forma generală:*

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}_a + \bar{F}_p \quad (8.10)$$

cu formularea: derivata, în raport cu timpul a impulsului unui rigid în mișcare, este egală cu rezultanta tuturor forțelor exterioare, active și pasive, care acționează asupra rigidului respectiv. Relația anterioară permite, după transformări, enunțarea *legii de conservare a impulsului*:

$$\bar{p} = M \cdot v_G = \bar{p}_0 \quad (8.11)$$

unde  $p_0$  este impulsul inițial al rigidului,  $M$  este masa rigidului iar  $v_G$  este viteza centrului de masă.

*Energiea electromagnetică* este forma de energie care depinde de mărimile de stare ale câmpului electromagnetic. Ea se poate descompune în energie electrică, care depinde numai de mărimile electrice ale câmpului și energia magnetică care depinde de mărimile magnetice ale câmpului. Concepția despre câmpul electromagnetic considerat ca sistem fizic capabil să schimbe, să acumuleze și să transmită energie, permite să se interpreteze energetic o consecință a ecuațiilor lui Maxwell, numită *teorema energiei electromagnetice*.

*Legea de conservare a sarcinii electrice adevărate.* Intensitatea instantanee a curentului electric de conducție  $i_\Sigma$ , care iese din orice suprafață închisă  $\Sigma$ , este egală cu viteza instantanee de scădere în timp a sarcinii electrice adevărate  $q_\Sigma$  din interiorul suprafeței presupuse antrenată de corpuri în mișcarea lor:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt} \quad (8.12)$$

Legea de conservare a sarcinii electrice (raportată la o suprafață închisă) are o

formă de exprimare asemănătoare cu rel. (8.12).

Din relația (8.12) pentru regim staționar rezultă prima teoremă a lui Kirchhoff pentru un nod de rețea:

$$\sum_K I_K = 0 \quad (8.13)$$

A doua relație cu utilitate extinsă, pentru regim staționar, este a doua teoremă a lui Kirchhoff :

$$\sum_k U_{ek} = \sum_k R_k \cdot I_k \quad (8.14)$$

În interiorul unei suprafețe închise delimitată dintr-un câmp magnetic, în care se găsesc corpuri imobile ( $v = 0$ ), cu proprietăți de material liniare este localizată o energie electromagnetică  $W_{e-m}$ :

$$W_{e-m} = \iiint_{V_\Sigma} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} dV \quad (8.15)$$

Din principiul de conservare al energiei rezultă că orice variație în timp a stării sistemului fizic, pe care îl constituie câmpul electromagnetic din interiorul suprafeței admise, trebuie să fie egală cu puterea cedată de acest sistem altor sisteme fizice:

$$-\frac{dW}{dt} = P_I + P_\Sigma \quad (8.16)$$

unde  $P_I$  este puterea transmisă de câmp corpurilor în procesul de conducție iar  $P_\Sigma$  este puterea transmisă în câmp prin suprafața închisă.

Într-o transformare de energie electrică în energie mecanică apare și o conversie de energie electrică în energie termică prin efect Joule. Acest efect are un caracter ireversibil. În bilanțul energetic intervin astfel forme de energie electrică, electrostatică, magnetică, mecanică și termică :

$$dW_{el} = dW_{mec} + dW_t + dW_{es} + dW_{mag} \quad (8.17)$$

unde termenii reprezintă :

- Variația energiei electrice :

$$dW_{el} = \sum_j u_j \cdot i_j \cdot dt \quad (8.18)$$

- Variația energiei mecanice :

$$dW_{mec} = \sum_k F_k \cdot dx_k \quad (8.19)$$

- Variația energiei termice :

$$dW_t = \sum_j R_j \cdot i_j^2 \cdot dt \quad (8.20)$$



- Variația energiei magnetice  $dW_{mag}$ .
- Variația energiei electrostatice (este localizată în câmpul electric din spațiul dintre plăcile unui condensator):

$$dW_{es} = \sum_i u_i \cdot Q_i - \sum_m F_m \cdot dx_m \tag{8.21}$$

unde  $Q_i$  are semnificația sarcinii electrice.

Teorema forțelor generate în câmpul electromagnetic sunt o expresie a extensiei legilor de bilanț energetic în acțiunea de modelare matematică a unui sistem electromecanic. Forța generalizată  $X_k$ , ce se exercită în câmpul electrostatic produs de un sistem de « h » conductoare, încărcate cu sarcini adevărate și situate într-un mediu dielectric liniar, asupra unuia dintre aceste conductoare și care acționează în sensul creșterii uneia dintre coordonatele sale generalizate  $x_k$  este:

$$X_k = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_{q=ct} = \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_{V=ct} \tag{8.22}$$

unde energia electrică a sistemului este exprimată în primul caz în funcție de coordonatele generalizate  $x_k$  și de sarcinile  $q_k$ , iar în al doilea caz în funcție de coordonatele generalizate și potențialele  $V_k$ .

**8.3.3.1.1. Exemplu. Bilanțul masic al lichidului dintr-un rezervor**

- *Delimitarea sistemului* este sugerată prin schema bloc din figura 8.19 unde debitul de intrare  $Q_1$  și debitul de ieșire  $Q_2$  sunt variabilele de intrare în sistem iar înălțimea  $h$  a lichidului este variabila de ieșire. Reprezentarea fizică a sistemului este dată în figura 8.19.



Fig. 8.19 Reprezentarea sistemică a rezervorului de lichid

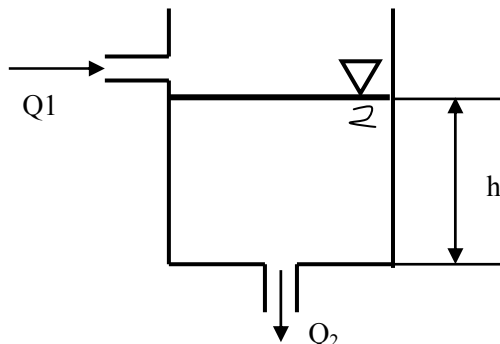


Fig. 8.20 Delimitarea sistemului

- Ipoteze simplificatoare:
  - Densitatea  $\rho$  a fluidului este constantă;
  - Lichidul este incompresibil
  - Rezervorul este poziționat vertical;
  - Secțiunea transversală a rezervorului este circulară, constantă;
- Parametrii din sistem:
  - Debitul volumic de intrare  $Q_1$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ] și debitul volumic de ieșire  $Q_2$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ];
  - $h$  [m] – nivelul lichidului în rezervor ;
  - $m$  [kg] – masa de lichid ;
  - $A$  [ $\text{m}^2$ ] – aria transversală ;
  - $V$  [ $\text{m}^3$ ] – volumul de lichid.
- Ecuația de bilanț (8.4) aplicată pentru *masa unui sistem* poartă de numirea de echilibrul masic și are forma :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sum_i Q_{mi} \quad (8.23)$$

unde  $m$ [kg] este masa,  $Q_{mi}$  [kg/s] este debitul masic iar  $t$ [s] este parametrul timp. Particularizată pentru echilibrul masic de lichid din rezervor, ecuația anterioară are forma :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho Q_1(t) - \rho Q_2(t) \quad (8.24)$$

Ecuația diferențială (8.24) (în  $m$ ) este modelul matematic al sistemului iar  $\rho$  este parametrul modelului. Există o condiție suplimentară pentru ecuația anterioară,  $m \geq 0$ . Prin rezolvarea analitică sau numerică a ecuației (8.24) se obține modul de variație a masei de lichid în timp.

Între parametrii geometrici ai rezervorului și masa de lichid din rezervor există relația simplă:

$$m(t) = \rho V(t) = \rho A h(t) \quad (8.25)$$

Ecuația diferențială (8.24) se poate transforma, pe baza relației (8.25):

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} \cdot [Q_1(t) - Q_2(t)] \quad (8.26)$$

cu condiția suplimentară  $h \geq 0$ . Ecuația diferențială (8.26) este o altă formă de exprimare a modelului matematic pentru sistemul analizat.

Admițând că variabila  $Q_2$  depinde de nivelul lichidului din rezervor – nu mai este o variabilă independentă, se poate scrie:

$$Q_2(t) = K \cdot \sqrt{\rho g h(t)} \quad (8.27)$$

astfel că bilanțul masic poate fi exprimat prin ecuația diferențială:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho Q_1(t) - \rho K \sqrt{\rho g h(t)} \quad (8.28)$$

Ecuția diferențială (8.28) se constituie într-un nou model matematic al rezervorului de lichid.

*Observație.* Modelul construit poate prezenta și alte dezvoltări dacă se ia în considerare și influența rezistenței de curgere asupra debitului.

**8.3.3.1.2. Exemplu. Bilanțul energetic pentru un sistem termic.**

Legea bilanțului (8.4) aplicabilă sistemelor termice devine ecuația bilanțului energetic:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \sum_i Q_i(t) \quad (8.29)$$

unde E[J] este energia termică,  $Q_i$  [J/s] este fluxul energetic iar t[s] este timpul.

Energia termică se definește printr-o relație de forma:

$$E = cmT = c\rho VT = CT \quad (8.30)$$

unde T [K] este temperatura, c [J/(kgK)] este căldura specifică, m[kg] este masa,  $V[m^3]$  este volumul,  $\rho[kg/m^3]$  este densitatea iar C [J/K] este capacitatea calorică.

Se consideră sistemul termic prezentat în figura 8.21 în care lichidul este adus la temperatura  $T_2$ .

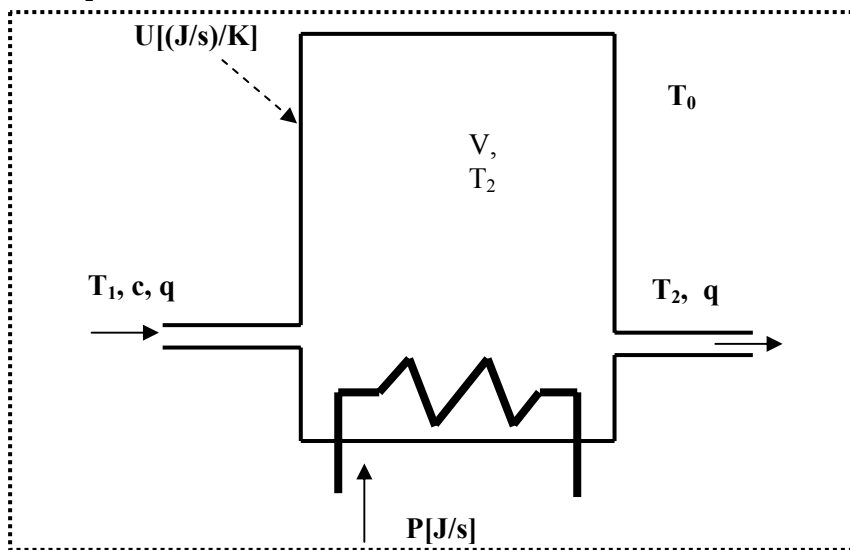


Fig. 8.21 Sistemul termic

Analiza sistemului are loc admițând următoarele:

- Lichidul din rezervor este omogen (sistemul de omogenizare nu este reprezentat);
- Debitul la intrare și ieșire sunt egale, rezervorul fiind plin cu lichid;

În mod ideal, elementul de încălzire nu stochează energie ci o transferă integral lichidului. În cazuri reale trebuie luată în considerare eficiența acestui transfer.

Semnificația notațiilor este următoarea:  $P$  [J/s] este puterea preluată de lichid de la elementul de încălzire;  $T_0$  este temperatura mediului ambiant.

Echilibrul energetic se bazează pe schimbul următoarelor fluxuri energetice:

- energia preluată de lichid de la elementul de încălzire :

$$Q_1 = P(t) \quad (8.31)$$

- energia înmagazinată în lichidul de intrare:

$$Q_2 = cq(t) \cdot T_1(t) \quad (8.32)$$

- energia înmagazinată în lichidul de ieșire:

$$Q_3 = cq(t) \cdot T_2(t) \quad (8.33)$$

- energia schimată de sistemul termic cu mediul exterior (înspre sau de la mediul exterior):

$$Q_4 = U \cdot [T_0(t) - T_2(t)] \quad (8.34)$$

Ecuția (8.29) pentru bilanțul energetic se particularizează :

$$\frac{dE(t)}{dt} = Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 \quad (8.35)$$

și ținând cont de (8.30) – (8.34) devine :

$$c\rho V \frac{dT_2}{dt} = P + cqT_1 - cqT_2 + U \cdot (T_0 - T_2) \quad (8.36)$$

sau

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{c\rho V} \cdot [P + cqT_1 - cqT_2 + U \cdot (T_0 - T_2)] \quad (8.37)$$

Ecuția bilanțului energetic (8.37) se poate particulariza dacă:

- sistemul termic este izolat față de mediu, astfel că  $Q_4 = 0$ ; dacă se consideră randamentul elementului de încălzire, puterea transferată va fi :

$$P(t) = \eta \cdot P_c(t) \quad (8.38)$$

### 8.3.3.1.3. Bilanțul energetic într-un sistem magnetic

Considerăm circuitul magnetic liniar din figura 8.22 compus din cadrul magnetic "1" și înfășurarea "2" având  $N$  spire și rezistența electrică  $R$ . Înfășurarea este alimentată la tensiunea  $u(t)$  și este parcursă de curentul  $i(t)$ .

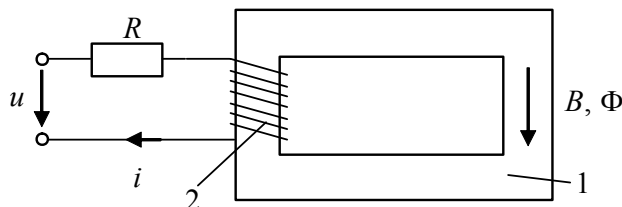


Fig. 8.22 Circuit magnetic liniar

Ecuțiile circuitului magnetic liniar:

$$u = Ri + N \frac{d\Phi}{dt} \tag{8.39}$$

$$N\Phi = Li \tag{8.40}$$

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \tag{8.41}$$

permis după înlocuiri, înmulțire cu  $idt$  și integrare să se obțină:

$$uidt = Ri^2 dt + nid\Phi \tag{8.42}$$

$$\int_0^t uid\tau = \int_0^t Ri^2 d\tau + \int_0^t nid\Phi \tag{8.43}$$

Această relație scoate în evidență bilanțul energetic din circuitul analizat: primul termen reprezintă energia furnizată de sursă, al doilea termen cuantifică energia disipată sub formă termică iar al treilea termen este echivalent energiei magnetice stocate în circuitul magnetic.

**8.3.3.2. Modele cu parametri distribuiți și concentrați**

Denumirea de *parametri distribuiți* este opusă celei de *parametri concentrați* și are în vedere modul în care structura sistemului este luată în considerare.

Mecanica teoretică admite studiul unui corp ca fiind redus la examinarea mișcării unui *punct material* atunci când nu ne interesează forma corpului și dimensiunile acestuia. *Masa* corpului se consideră *concentrată* în punctul material. Un exemplu edificator este prezentat în figura 8.23 în care masa autoturismului se consideră concentrată în centrul de masă.

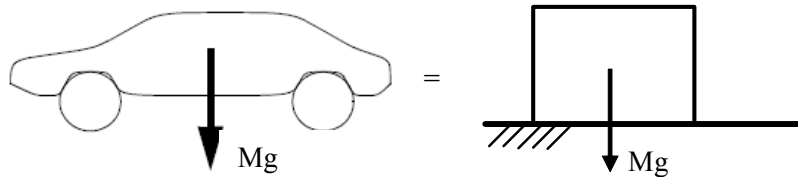


Fig. 8.23 Exemplificarea parametrului concentrat

Adeseori însă, în calculul de mecanic masa unui corp nu se poate considera ca fiind concentrată fiind necesară admiterea unei *distribuții* a acesteia pe o suprafață sau pe o lungime. Exemple similare se pot da și pentru sistemele hidraulice, termice etc.

Domeniului electric îi sunt specifice circuite formate din diverse componente: rezistoare, bobine, condensatoare, diode, tranzistoare, amplificatoare operaționale, baterii, motoare s.a.m.d. Unui circuit fizic format din astfel de componente i se asociază *circuitul electric* alcătuit din modele idealizate denumite *elemente de circuit*. Un element de circuit modelează un singur fenomen fizic descris de o relație matematică simplă între tensiunea și curentul de la borne. Astfel:

- Rezistorul ideal este caracterizat de ecuația  $u(t) = R \cdot i(t)$  și modelează efectul rezistiv;
- Bobina ideală este caracterizată de ecuația  $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$  și modelează efectul inductiv;
- Condensatorul ideal este caracterizat de ecuația  $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$  și modelează efectul capacitiv.

Orice circuit electric este un *model aproximativ* al circuitului real.

Fenomenele electromagnetice se propagă cu o viteză aproximativ egală cu viteza "c" a luminii în vid. Fie un semnal sinusoidal

$$s(t, x) = A \cdot \sin \left[ 2\pi f \cdot \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (8.44)$$

care se propagă cu viteza "c" pe direcția "x". Pe direcția celei mai mari dimensiuni  $x_{\max} = d$  a circuitului, va rezulta o întârziere în fenomenul de propagare egală cu  $\Delta t = \frac{d}{c}$ . Să admitem că în același circuit se propagă un semnal util caracterizat de o

perioadă minimă  $T_{\min} = \frac{1}{f_{\max}}$ . Dacă  $\Delta t$  este neglijabil față de  $T_{\min}$  este evident că efectul de propagare poate fi neglijat și se consideră că semnalele se propagă instantaneu. Un astfel de model se numește cu *parametri concentrați* iar dependența fenomenelor este strict de parametrul timp.

Dacă efectul de propagare nu se poate neglija, circuitului electric i se asociază un model cu *parametri distribuiți* (fig.8.24).

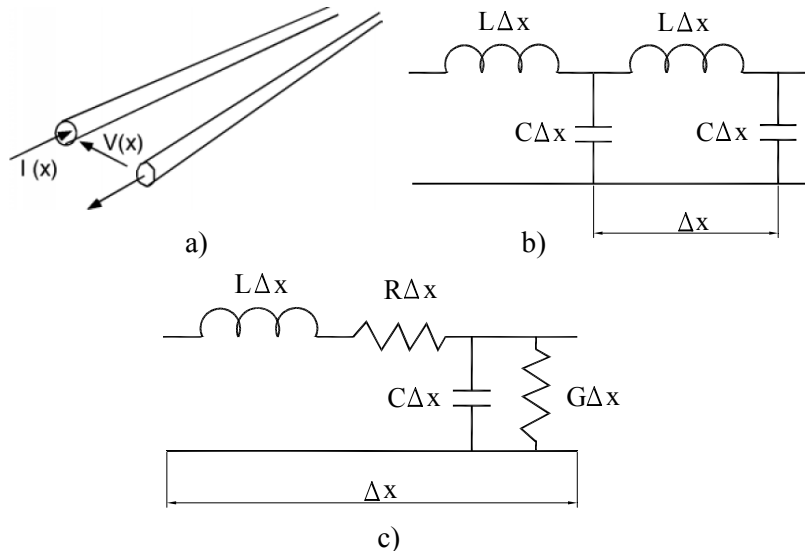


Fig. 8.24 Linie electrică cu parametri distribuiți

În astfel de circuite tensiunile și curenții sunt funcții de timp și variabile spațiale.

Ca și exemplificare pentru sistemul electric cu parametri distribuiți se prezintă în figura 8.24 *modelul cu parametri distribuiți* (L, C, G) pentru o linie electrică. Linia electrică a fost divizată în segmente de lungime  $\Delta x$  care corespunde mai bine aproximărilor admise pentru o linie de lungime finită.

Fiind mai simplu, modelul cu parametri concentrați este de preferat atunci când poate fi utilizat.

### 8.3.3.3. Ecuțiile dinamice

#### 8.3.3.3.1. Introducere

O importantă metodă de interpretare și reprezentare a comportamentului unui sistem a fost exprimată cu ajutorul ecuațiilor diferențiale.

Construirea modelului pornește cu aplicarea legilor fizice de bază (legile lui Newton, legile lui Maxwell, legile lui Kirckhoff etc.) la procesul care se studiază, adică un proces mecanic, electric, sau termodinamic. De la aceste legi, rezultă un număr de ecuații între variabilele sistemului și o variabilă independentă (în general timpul  $t$ ). Aceste ecuații pot căpăta diverse forme:

- **Ecuatii diferențiale ordinare (Ordinary Differential Equations – ODEs)** care conține o singură variabilă independentă:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{8.45}$$

unde:  $y = f(x)$  este o funcție de variabila independentă  $x$ ;  $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$  este derivata de ordinul  $i$  ( $i = 1 \dots n$ ) a funcției “ $y$ ” în raport cu “ $x$ ”. Funcția reală  $f(x)$  care satisface condițiile de mai sus se numește soluția ecuației diferențiale.

Construcția modelului pentru sistemul fizic poate conduce la obținerea a “ $j$ ” ecuații diferențiale care vor defini sistemul de ecuații diferențiale aferent modelului matematic:

$$\begin{cases} F_1(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_j(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \end{cases} \tag{8.46}$$

Aceste ecuații pot căpăta diverse particularizări care conduc și la existența unor metode diferite de soluționare a lor: ecuații diferențiale liniare sau neliniare, ecuații omogene sau ne-omogene.

Modul de rezolvare a acestor ecuații este prezentat pe larg în literatura de specialitate. Software-ul aplicativ oferă posibilități multiple de rezolvare:

- În **Matematica** rezolvarea ecuațiilor ODE se poate realiza în mod exact apelând funcția **Dsolve [eqn, y, n]** sau numeric apelând funcția

- **NDSolve** [eqn, y, {x, x<sub>min</sub>, x<sub>max</sub>}];
- În **Matlab** rezolvarea simbolică a ecuațiilor ODE este facilitată de funcția **dsolve** iar rezolvarea numerică prin apelarea funcției **ode23** sau **ode45**;
- În **MathCAD** rezolvarea numerică a ecuației diferențiale prin metoda Runge-Kutta se realizează prin apelarea funcției **rkfixed**.
- **Ecuații diferențiale algebrice (DAEs)** reprezintă de fapt un cuplaj între ecuații diferențiale și ecuații algebrice iar conținutul se regăsește și sub alte denumiri. Forma prezentabilă a acestor ecuații este:
  - implicită, forma generală

$$F(x, y, y', t) = 0 \quad (8.47)$$

unde  $y$  este o variabilă diferențială,  $x$  este o variabilă algebrică,  $t$  este variabila independentă (scalar, de obicei timpul) iar  $y(0) = y_0$  este condiția inițială.

❖ implicită, liniar

$$A \cdot y' + f(y, t) = 0 ; y(0) = y_0 \quad (8.48)$$

❖ semi-explicită

$$\begin{aligned} x' &= f(x, z, t) \\ g(x, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (8.49)$$

Aplicabilitatea acestor ecuații este extremă de largă: simularea circuitelor electrice, analiza sistemelor dinamice cu constrângeri, controlul optimal al sistemelor cu parametri concentrați, mecanica fluidelor etc.

Ecuațiile DAEs sunt reductibile la ecuații ODEs.

- **Ecuații cu derivate parțiale (Partial Differential Equations – PDEs)**  
O relație de forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \quad (8.50)$$

unde  $F$  este o funcție reală de  $2n+1$  argumente, definită pe un domeniu  $\Delta \subset R^{2n+1}$ , se numește ecuație cu derivate parțiale de ordinal întâi, dacă se cere să se determine funcția  $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cu derivate parțiale de ordinal întâi continue într-un domeniu  $D \subset R^n$ , astfel încât să avem

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}) = 0 \quad (8.51)$$

pentru orice  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ . Funcțiile reale  $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  care îndeplinesc condițiile de mai sus se numesc soluții ale ecuației cu derivate parțiale. Dacă  $F$  depinde și de derivatele de ordin superior ale lui  $u$ , atunci o astfel de relație se numește ecuație cu derivate parțiale de ordin superior [8.28].

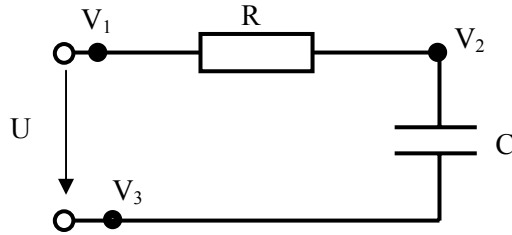


În general, ecuațiile cu derivate parțiale sunt mai dificil de rezolvat în mod analitic decât ecuațiile diferențiale ordinare.

Unele din **PDEs** pot fi rezolvate exact prin **Matematica** apelând funcția **DSolve [eqn,y,{x1,x2}]** și numeric utilizând **NDSolve [eqn,y,{x,xmin, xmax}, {t,tmin, tmax}]**.

**8.3.3.3.2. Exemplu pentru DAEs în domeniul electric**

Se consideră circuitul RC din figura 8.25 pentru care ne propunem să construim modelul matematic.



**Fig. 8.25 Circuitul RC și potențialele  $V_i$  asociate**

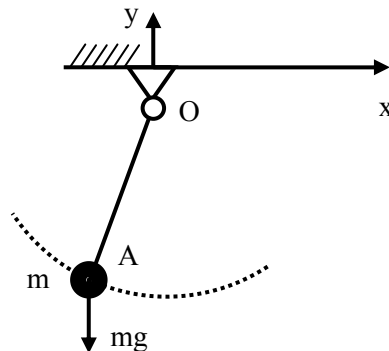
În acest sens, se asociază potențialele  $V_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) fiecărui port a componentelor de circuit. Potențialul  $V_3$  se asociază potențialului de referință.

Utilizând relațiile constitutive specifice componentelor  $R, C$  și teoremele lui Kirkcoff se obține modelul matematic reprezentat prin ecuațiile diferențiale algebrice:

$$\begin{cases} V_1 - V_3 - U = 0 \\ C \cdot \left( \frac{dV_3}{dt} - \frac{dV_2}{dt} \right) + \frac{V_1 - V_2}{R} = 0 \\ V_3 = 0 \end{cases} \quad (8.52)$$

**8.3.3.3.3. Exemplu pentru DAEs în domeniul mecanic**

Se consideră pendulul fizic din figura 8.26 modelat prin mișcarea punctului material de masă “ $m$ ” în sistemul de coordonate cartezian ( $Oxy$ ) sub acțiunea forței gravitaționale.



**Fig. 8.26 Pendulul fizic**

Ecuția traiectoriei, descrise de masa "m", este cea a unui cerc cu centrul în punctul O și constituie o constrângere în cadrul sistemului analizat:

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad (8.53)$$

Energia cinetică și respectiv potențială a masei în mișcare sunt:

$$E_c = m \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad (8.54)$$

$$E_p = mgy \quad (8.55)$$

Pe baza relațiilor anterioare, se poate scrie funcția Lagrange:

$$L = E_c - E_p - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - l^2) \quad (8.56)$$

Utilizând ecuația lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0 \quad (8.57)$$

se poate determina sistemul de ecuații care descrie mișcarea punctului material pentru  $g = x, y, \lambda$ :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2\lambda x = 0 \\ m\ddot{y} + 2\lambda y + mg = 0 \\ x^2 + y^2 - l^2 = 0 \end{cases} \quad (8.58)$$

#### 8.3.3.3.4. Exemplu pentru model cu ecuații cu derivate parțiale

Se consideră o bară prismatică (fig.8.27) pentru care se urmărește determinarea modelului matematic al vibrației longitudinale.

Bara are lungimea L și secțiunea constantă A, modulul de elasticitate E și densitatea  $\rho$ . Forța externă este  $F(x,t)$  distribuită pe unitatea de lungime. Se consideră volumul infinitezimal de lungime  $dx$ . Aplicând formalismul Newton pentru echilibrul dinamic al volumului infinitezimal se obține:

$$\rho A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot dx = P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx - P + F(x,t) \cdot dx \quad (8.59)$$

După transformări se obține:

$$\rho A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot dx = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx + F(x,t) \cdot dx \quad (8.60)$$

$$\rho A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + F(x,t) \quad (8.61)$$

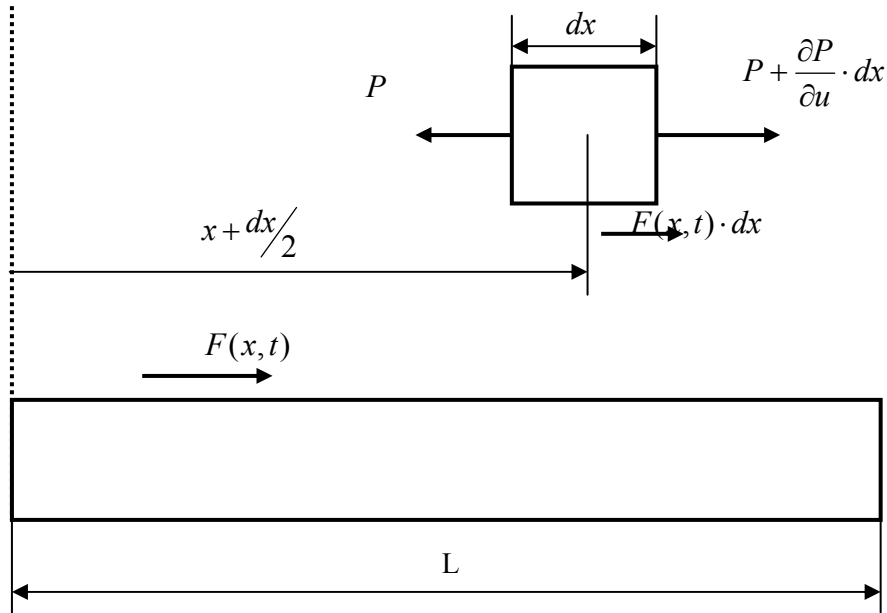


Fig. 8.27 Bară prismatică solicitată axial

Forța \$P\$ este definită prin:

$$P = \sigma \cdot A = \varepsilon \cdot E \cdot A = AE \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \tag{8.62}$$

Pe baza relației anterioare se obține ecuația:

$$\rho A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x,t) \tag{8.63}$$

care descrie vibrația longitudinală forțată a barei și reprezintă modelul matematic căutat.

### 8.3.3.4. Scheme bloc

#### 8.3.3.4.1. Introducere

Să considerăm un sistem real (fig.8.28) în care elementele componente sunt acoperite încât nu se poate cunoaște construcția lui interioară (în conformitate cu modul de definire a unui sistem și a compunerii acestuia din elemente reprezentabile prin blocuri conectabile în funcție de procesul de funcționare) și nu se pot observa decât firele (conductele) de legătură dintre elemente.

Pe baza schemei funcționale a sistemului real se poate obține schema bloc a acestuia (fig.8.29). Dacă se notează în blocurile schemei ecuațiile comportării la transfer a fiecărui element în parte, atunci schemele bloc vor reprezenta într-o formă

schematică toate elementele esențiale care sunt necesare pentru aprecierea sistemului și anume comportarea la transfer și structura (fig.8.30).

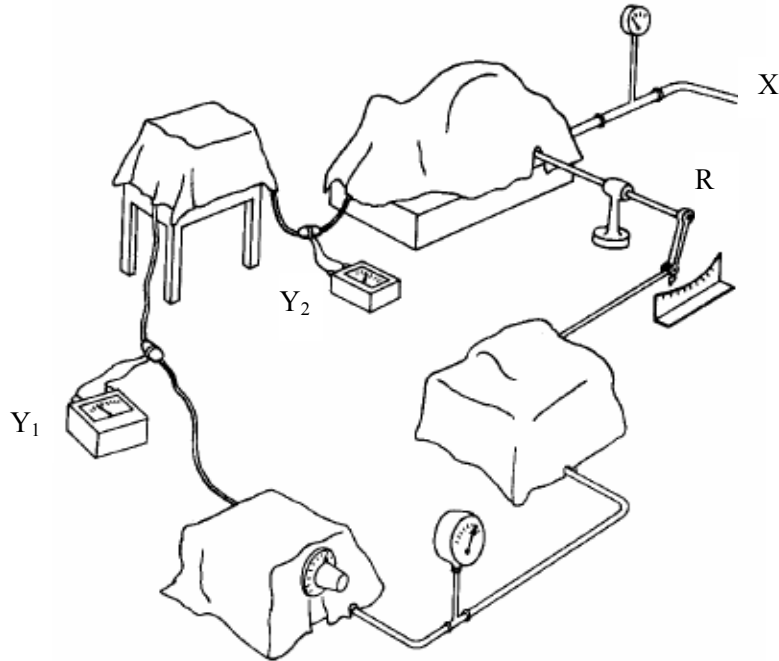


Fig. 8.28 Sistem real

**SISTEM S**

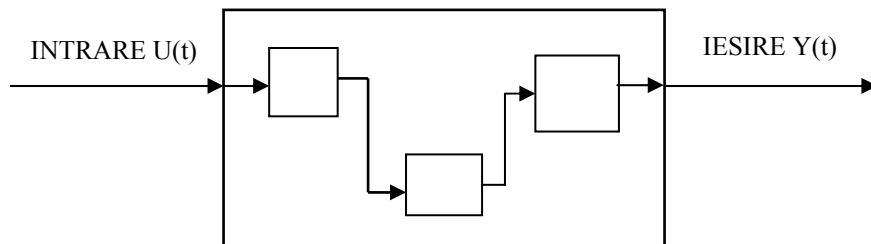


Fig. 8.29 Sistem și schema bloc

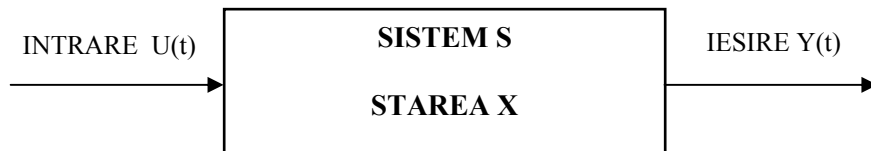


Fig. 8.30 Sistem, stare și schema bloc

**8.3.3.4.2. Transformata Laplace, funcția de transfer și scheme bloc**

Transformarea Laplace este o metodă care se utilizează pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, ecuații ce caracterizează numeroase aplicații din sistemele mecanice și electrice. În esență, metoda transformă ecuațiile diferențiale în ecuații algebrice, prin introducerea unei noi variabile,  $s$  de tip complex.

Se consideră o funcție  $f(t)$  în care  $t$  este variabila timp, și  $f(t) = 0$  pentru  $t < 0$ . Dacă funcția  $f(t)$  satisface următoarele condiții:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\alpha t}| dt < \infty \tag{8.64}$$

pentru orice  $\alpha \in R, 0 < \alpha < \infty$  atunci transformata Laplace a funcției  $f(t)$  există, este unică și este definită prin:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \tag{8.65}$$

$\mathcal{L}$  este operatorul Laplace, iar  $s$  este o variabilă complexă, de forma  $s = \sigma + j\omega$ . Teoria sistemelor utilizează relația dintre mărimile de intrare și de ieșire pentru un sistem liniar invariant în timp, relație care se numește *funcție de transfer a sistemului*.

Fie sistemul având următoarea ecuație diferențială ca relație între mărimile de intrare  $u(t)$  și de ieșire  $y(t)$ , unde  $y^{(k)}(t)$  este derivata de ordinul „k” a mărimii de ieșire  $y(t)$ , iar  $u^{(i)}(t)$  este derivata de ordinul „i” a mărimii de intrare,  $u(t)$ :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t) \tag{8.66}$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k y}{dt^k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{și} \quad u^{(i)}(t) = \frac{d^i u}{dt^i} \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{8.67}$$

Se presupune că condițiile inițiale, adică valorile în  $t = 0$  pentru toate funcțiile, inclusiv derivatele lor, sunt nule:

$$y^{(k)}(t) = 0 \quad \forall k < n \quad \text{și} \quad u^{(i)}(t) = 0 \quad \forall i < m \tag{8.68}$$

Transformata Laplace a relației dintre mărimile de intrare și de ieșire se poate scrie, pe baza proprietăților acesteia de liniaritate și a modului de calcul a transformatei pentru derivata unei funcții:

$$s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \dots + a_0Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_0U(s) \tag{8.69}$$

De aici, transformata Laplace a mărimi de ieșire se poate exprima sub forma:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} U(s) \quad (8.70)$$

sau

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (8.71)$$

Funcția  $G(s)$  este funcția de transfer a sistemului și reprezintă o funcție rațională de „ $s$ ”. Prin introducerea noțiunii de funcție de transfer, schema-bloc a sistemului devine mai concretă (fig. ):

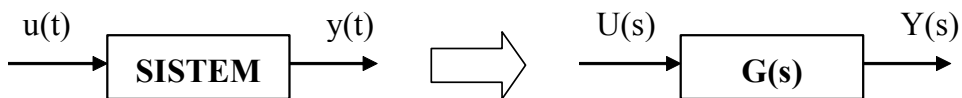


Fig. 8.31 Schema bloc a unui sistem, cu evidențierea funcției de transfer

Funcția de transfer  $G(s)$  reprezintă o proprietate a elementului / sistemului dat. Combinarea mai multor sisteme într-un *singur bloc* rezultat poate fi extinsă. Rearanjarea schemelor bloc în vederea simplificării, este denumită „algebra schemelor bloc”. În figurile 8.32 – 8.38 sunt reprezentate cele mai importante identități ale algebrei schemelor bloc, care sunt utilizate în simplificarea sistemelor [8.18].

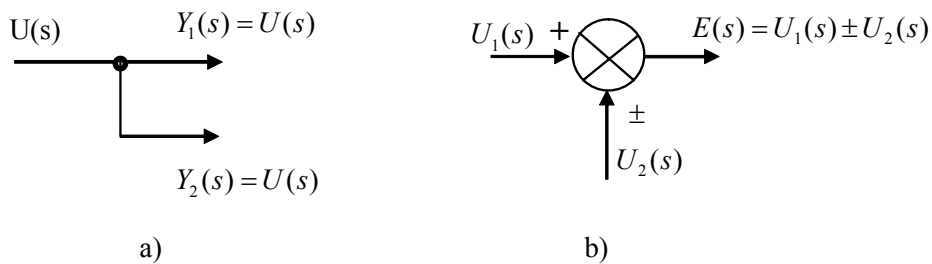


Fig. 8.32 Funcția de transfer pentru: a- un nod; b - sumator

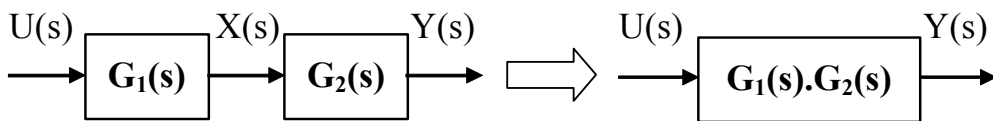


Fig. 8.33 Funcția de transfer a unei serii de subsisteme

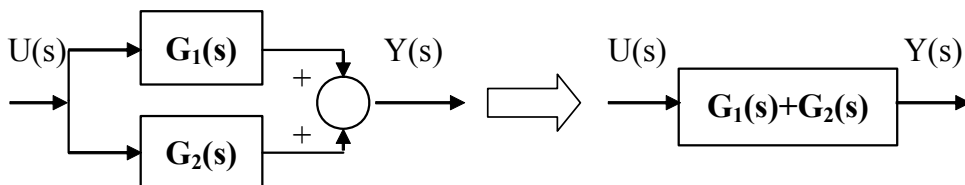


Fig. 8.34 Funcția de transfer a unei conexiuni de subsisteme în paralel

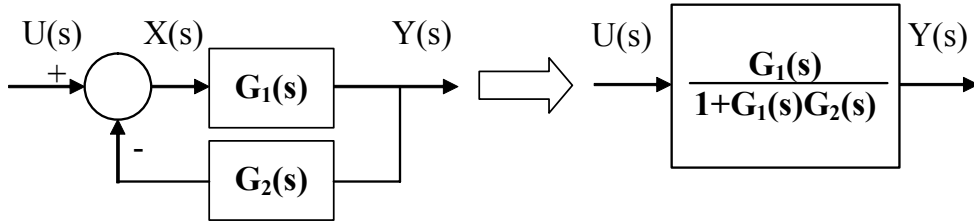


Fig. 8.35 Funcția de transfer a conexiunii cu reacție negativă

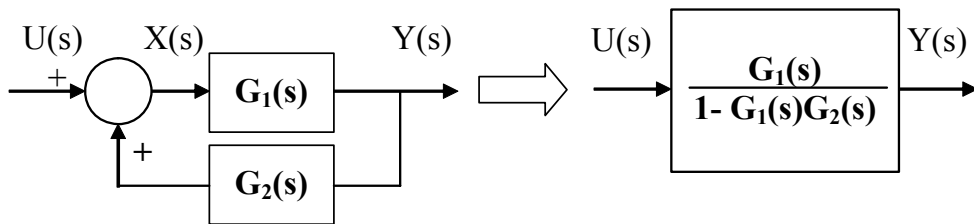


Fig. 8.36 Funcția de transfer a conexiunii cu reacție pozitivă

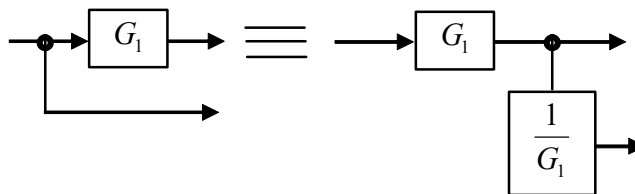


Fig. 8.37 Modificarea punctului de ramificație

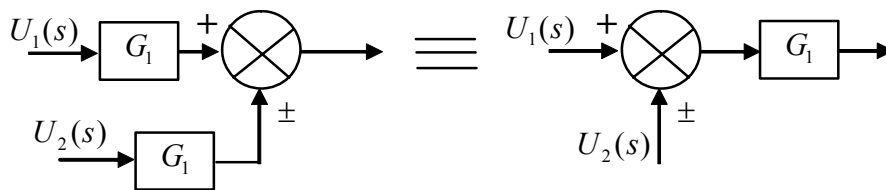


Fig. 8.38 Modificarea poziției unui bloc față de sumator

În cazul sistemelor cu mai multe intrări (MISO – multiple input / single output) se poate determina răspunsul sistemului utilizând *principiul superpoziției* : *răspunsul sistemului pentru intrări multiple simultane este suma răspunsurilor individuale pentru fiecare intrare aplicată separat* .

Utilizând tehnicile de simplificare a schemelor bloc se poate reduce sistemul analizat la un singur element cu o funcție de transfer echivalentă.

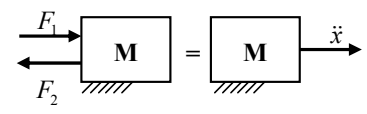
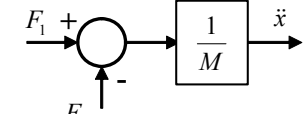

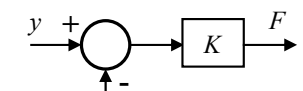
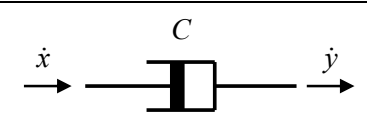
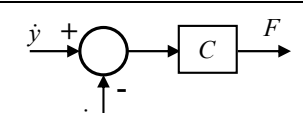
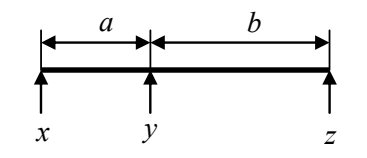
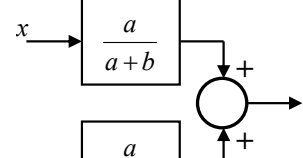
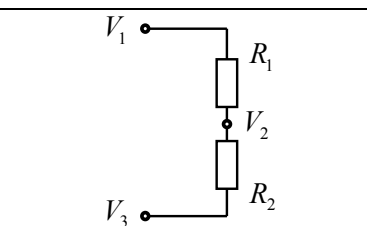
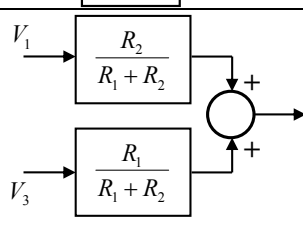
Dacă se dispune de imaginea Laplace a unui sistem, prin funcția  $F(s)$ , se poate determina funcția originală,  $f(t)$  cu ajutorul inversei transformatei Laplace:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \quad (8.72)$$

În numeroase cazuri, este mai ușor să se exprime inversa transformatei Laplace a unei funcții în raport cu cea a unor funcții simple, elementare, pentru care aceasta este cunoscută. Modul de aplicare este specific teoriei sistemelor [8.18].

În sensul celor prezentate anterior, sistem – model matematic – scheme bloc, se prezintă în tabelul 8.2 câteva exemplificări sugestive privind acest paralelism.

Tabelul 8.2

Model grafic	Model matematic	Modelul diagramei bloc
	$\sum F_i = M \cdot \ddot{x}$ $\ddot{x} = \frac{1}{M} \sum F_i$	
	$F = K \cdot (y - x)$	
	$F = C \cdot (\dot{y} - \dot{x})$	
	$y = \frac{b}{a+b} \cdot x + \frac{a}{a+b} \cdot z$	
	$V_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_3$	

#### 8.3.3.4.3. Exemple de calcul

a) Se consideră sistemul cu schema prezentată în figura 8.39. Se cere, să se determine ieșirea sistemului în condițiile unei intrări  $U(s)$  și a unei perturbații externe  $D(s)$ .



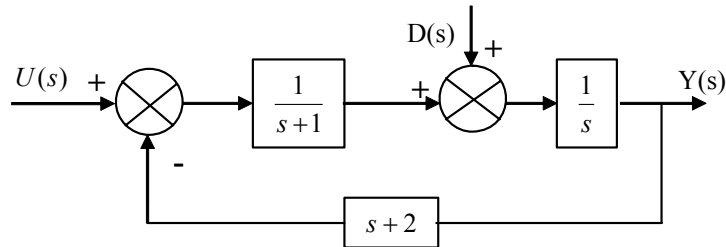


Fig. 8.39 Sistem cu perturbație de intrare

Aplicând principiul superpoziției, ieșirea sistemului se determină ca fiind:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \tag{8.73}$$

corespunzător cazurilor:

- Perturbație zero (fig.8.40)

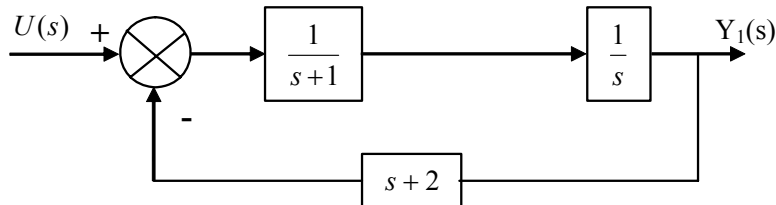


Fig. 8.40 Sistemul cu perturbație zero

Aplicând tehnicile de simplificare se poate determina ieșirea sistemului:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \cdot U(s) \tag{8.74}$$

- Intrare zero (fig.8.41)

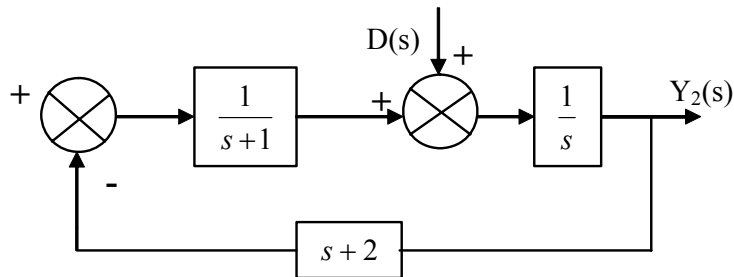


Fig. 8.41 Sistemul cu intrare egală cu zero

Utilizând aceleași tehnici de simplificare se poate determina ieșirea sistemului:

$$Y_2(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} \cdot D(s) \tag{8.75}$$

Având în vedere relațiile (8.74), (8.75) se poate determina ieșirea sistemului în condițiile celor două intrări simultane:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \cdot U(s) + \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} \cdot D(s) \quad (8.76)$$

b) Să se reducă sistemul, din figura 8.42 la un singur element, utilizând tehnicile de simplificarea a algebrei schemelor bloc.

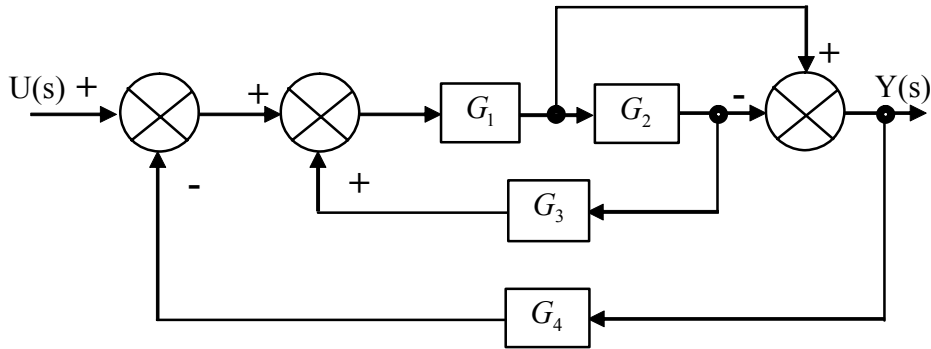


Fig. 8.42 Schema bloc complexă a sistemului

Procedura aplicată rezultă din figurile următoare. Fiecare pas are alocată o figură. Se indică de fiecare dată funcția de transfer în blocul echivalent rezultat.

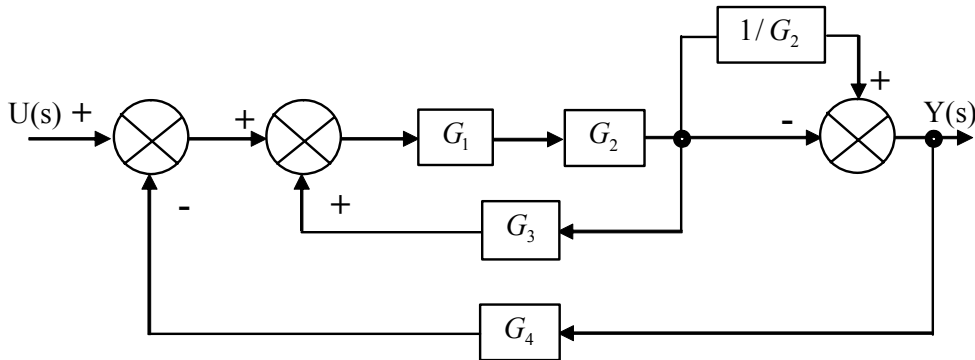


Fig. 8.43 Modificarea poziției punctului de ramificație

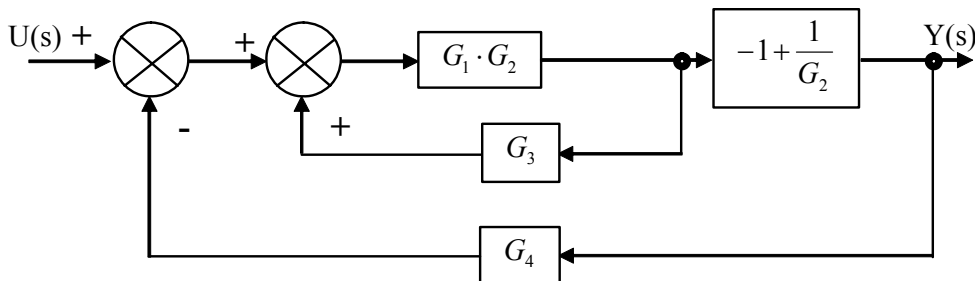


Fig. 8.44 Eliminarea buclei de alimentare directă și simplificarea elementelor în serie

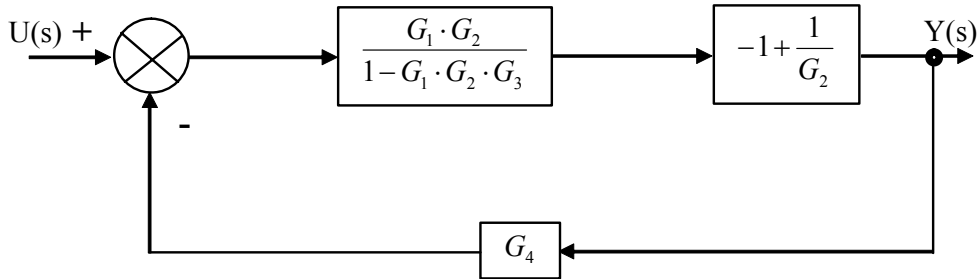


Fig. 8.45 Simplificarea buclei de reacție pozitivă

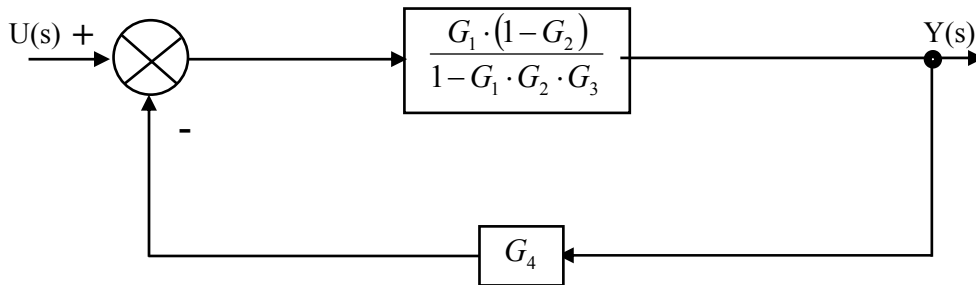


Fig. 8.46 Simplificarea elementelor în serie pe calea directă

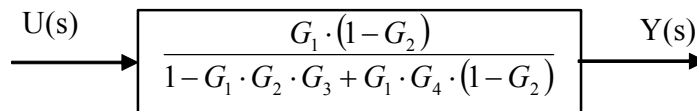


Fig. 8.47 Simplificarea buclei de reacție negativă

### 8.3.3.5. Metoda impedanței generalizate

#### 8.3.3.5.1. Impedanța generalizată

În teoria sistemelor una din metodele de bază în modelare și analiză este cea a funcției de transfer. Din păcate modul de abordare a reprezentării unui sistem prin intermediul funcției de transfer – o mărime de intrare și una de ieșire – face abstracție de considerente energetice specifice sistemelor fizice.

Teoria sistemelor fizice are la bază noțiunea de energie (E) definită ca puterea acumulată în timp. Pornind de la acest aspect se introduce noțiunea de putere generalizată  $\Pi$  ca produsul a două mărimi cantitative fizice, observabile și complementare:

$$\Pi = \alpha \cdot \tau \tag{8.77}$$

$$E = \int \Pi dt = \int \alpha \cdot \tau dt \tag{8.78}$$

În mod generic cele două mărimi se referă la cantități dintre două puncte

( $\alpha$ ) (across) și respectiv dintr-un punct ( $\tau$ ) (through). Exemple de o astfel de încadrare a unor mărimi fizice sunt prezentate în tabelul 8.3

Tabelul 8.3

DOMENIUL	MĂRIMEA $\alpha$	MĂRIMEA $\tau$
Translație mecanică	Viteza [m/s]	Forța [N]
Rotație mecanică	Viteza unghiulară [rad/s]	Cuplul [Nm]
Electric	Tensiunea [V]	Curentul [A]
Hidraulic	Presiunea [N/m <sup>2</sup> ]	Debitul volumic [m <sup>3</sup> /s]

Un dipol liniar pasiv (fig.8.48) se echivalează în domeniul electric cu o mărime pozitivă care depinde de frecvența de lucru și parametrii circuitului, denumită impedanța circuitului.

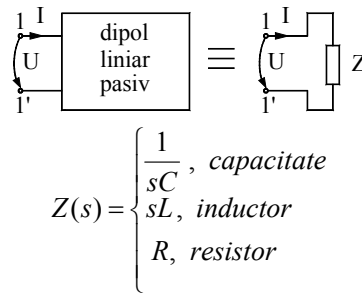


Fig. 8.48 Dipol pasiv și impedanța în domeniul electric

Noțiunea de impedanță se poate generaliza și pentru alte domenii diferite de cel electric. În domeniul mecanic – sisteme mecanice de translație - impedanțele corespunzătoare, pentru analogia deplasare  $X \leftrightarrow$  sarcina electrică, sunt (fig.8.49):

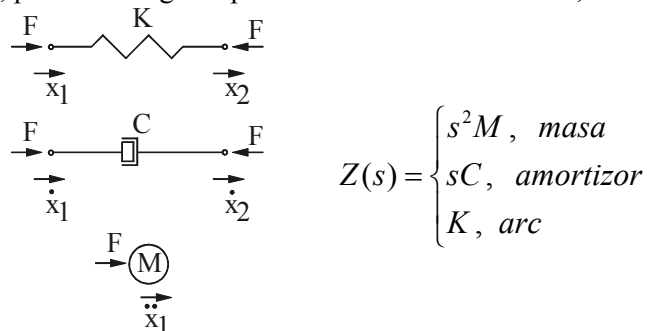


Fig. 8.49 Impedanța mecanică

Pentru analogia viteză  $\frac{dx}{dt} \leftrightarrow$  intensitatea curentului  $I$ , se obține o altă

variantă a impedanței mecanice. Alegerea unei variante sau a alteia ține doar de comoditatea de lucru. Pentru sistemele mecanice de rotație se pot defini în mod asemănător relații pentru impedanțele echivalente.

Avantajele echivalențelor și generarea impedanței generalizate în modul de construcție a modelelor pentru sistemele fizice este un lucru cert.

O reprezentare mai complexă a unui sistem are la bază utilizarea noțiunii de cuadripol. Sistemul este reprezentat prin două mărimi de intrare și două de ieșire (fig.8.50). Poarta de intrare cu bornele 1 și 1' și poarta de ieșire cu bornele 2, 2' caracterizează cuadripolul. Fiecărei porți îi este asociată o putere instantanee.

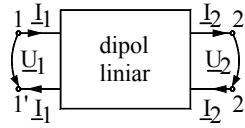


Fig. 8.50 Cuadripol

Funcția cea mai importantă a unui cuadripol este cea de element al unui lanț de transmitere a energiei.

Pentru un cuadripol se pot defini:

- *impedanța* ca o mărime care caracterizează rețeaua inclusă și depinde doar de parametrii circuitului:

$$Z = \frac{U}{I} \tag{8.79}$$

- inversa impedanței, *admitanța*:

$$Y = \frac{1}{Z} \tag{8.80}$$

- *puterea instantanee* la borne:

$$p = u \cdot i \tag{8.81}$$

Forma fundamentală a ecuației cuadripolului este:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \tag{8.82}$$

unde A, D sunt coeficienți adimensionali, B este o impedanță iar D este o admitanță.

Condiția de reciprocitate a dipolului se exprimă printr-o relație de forma:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1 \tag{8.83}$$

Un caz aparte pentru cuadripoli și care trebuie amintit, este giratorul (gyrator) definit ca și un cuadripol pasiv și liniar, antireciproc:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = -1 \tag{8.84}$$

Reprezentarea grafică a giratorului și ecuațiile caracteristice sunt:

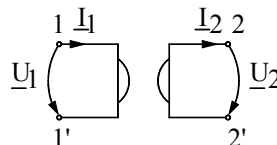


Fig. 8.51 Gyratorul

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = k \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = k \cdot \underline{I}_1 \end{cases} \quad (8.85)$$

unde "k" este o constantă specifică dipolului respectiv.

Prin proprietatea de a cupla în sistemul de ecuații mărimea de intrare și cea de ieșire acest concept permite stabilirea unei relații între mărimi de intrare și ieșire de natură diferită. Cuplajul electromecanic având mărimea de intrare electrică (tensiune, curent) și mărimea de ieșire mecanică (forță generalizată, viteză) este incontestabil cazul cel mai important.

Există și posibilitatea de reprezentare printr-un dipol pentru sistemele fizice mecanice și avantajele sunt deosebite, în special când nu se neglijează deformațiile torsionale din sistem în cazul sistemelor rapide, la utilizarea unor cuplaje comandate în lanțul cinematic sau la utilizarea transmisiilor mecanice în lanțul cinematic [8.17].

Două sisteme mecanice clasice – un variator mono (fig.8.52a) și un reductor de turație (fig.8.52b) au dependențele dintre mărimile de intrare și ieșire:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{R_1 \cdot (1 - \xi)}{R_2} \cdot M_2 \\ \omega_1 = \frac{R_2}{R_1 \cdot (1 - \xi)} \cdot \omega_2 \end{cases} \quad (8.86)$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{i} \cdot M_2 \\ \omega_1 = i \cdot \omega_2 \end{cases} \quad (8.87)$$

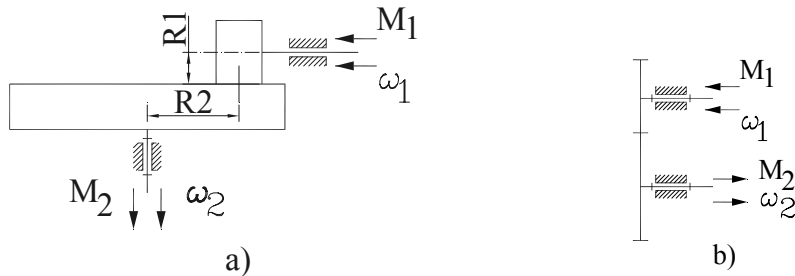


Fig. 8.52 Transmisii mecanice: a – variator mono; b – reductor de turație

Din relațiile anterioare se pot determina rapid matricile dipolilor care reprezintă cele două sisteme:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & i \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{R_1 \cdot (1 - \xi)}{R_2} & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{R_1 \cdot (1 - \xi)} \end{bmatrix} \quad (8.89)$$

Impedanța pentru diverse elemente este prezentată în tabelul 8.4 [8.8]

Tabelul 8.4

<b>Element electric</b> <i>efort = tensiune</i> <i>flux = curent</i>	<b>Capacitate</b> $u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_0$ $Z_c = \frac{\Delta U(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$	<b>Inductivitate</b> $u = L \frac{di}{dt}$ $Z_L = \frac{U(s)}{I(s)} = sL$	<b>Resistor</b> $u = Ri$ $Z_R = \frac{U(s)}{I(s)} = R$
<b>Element mecanic (analogie forță – curent)</b> <i>efort = viteză</i> <i>flux = forță</i>	<b>Masă</b> $v = \frac{1}{M} \int_0^t F dt + v_0$ $Z_m = \frac{\Delta v(s)}{F(s)} = \frac{1}{sM}$	<b>Element elastic (arc)</b> $\Delta v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$ $Z_e = \frac{v(s)}{F(s)} = \frac{s}{k}$	<b>Amortizor</b> $\Delta v = \frac{1}{c} F$ $Z_a = \frac{v(s)}{F(s)} = \frac{1}{c}$
<b>Element mecanic (analogie forță – tensiune)</b> <i>efort = forță</i> <i>flux = viteză</i>	<b>Arc</b> $F = k \int_0^t \Delta v dt + F_0$ $Z_e = \frac{F(s)}{v(s)} = \frac{k}{s}$	<b>Masă</b> $F = M \frac{dv}{dt}$ $Z_m = \frac{F(s)}{v(s)} = sM$	<b>Amortizor</b> $F = c \Delta v$ $Z_a = \frac{F(s)}{v(s)} = c$
<b>Element fluidic</b> <i>efort = presiune</i> <i>flux = debit</i>	<b>Capacitate</b> $p = \frac{1}{C} \int_0^t q dt + p_0$ $Z_c = \frac{\Delta p(s)}{q(s)} = \frac{1}{sC}$	<i>Uzual ignorat –</i> <i>efectul de ciocan</i>	<b>Rezistență</b> $\Delta p = Rq$ $Z_r = \frac{\Delta p(s)}{q(s)} = R$
<b>Element termic</b> <i>efort =</i> <i>temperatură</i> <i>flux = debit</i>	<b>Capacitate</b> $\Theta = \frac{1}{C} \int_0^t q dt + \Theta_0$ $Z_c = \frac{\Delta \Theta(s)}{q(s)} = \frac{1}{sC}$	-	<b>Rezistență</b> $\Delta \Theta = Rq$ $Z_r = \frac{\Delta \Theta(s)}{q(s)} = R$

Impedanța  $Z_x$  a unei compenete  $X$  se poate defini în funcție de variabila ( $\alpha$ ) (across) – pe care o considerăm o variabilă potențial  $PV$  - și de variabila ( $\tau$ ) (through) – pe care o considerăm o variabilă flux  $FV$  - prin relația [8.33]:

$$Z_x = \frac{\Delta PV}{FV} \tag{8.90}$$

conform unei reprezentări grafice ca în figura 8.53

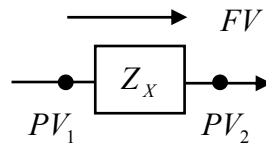


Fig. 8.53 Reprezentarea grafică a impedanței generalizate

Într-o analogie cu domeniul electric, sistemul analizat și reprezentat printr-un circuit, se poate simplifica aplicând principiile de calcul din domeniul electrotehnic. În tabelul 8.5 se prezintă relațiile fundamentale pentru calculul circuitelor cu impedanțe.

Tabelul 8.5

Configurarea impedanțelor	Relații de calcul
	$0 = \sum_{i=1}^n FV_i$
	$0 = \sum_{j=1}^n PV_j$
	$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3$
	$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots$

Pentru un divizor de tensiune (fig.8.54) este valabilă relația:

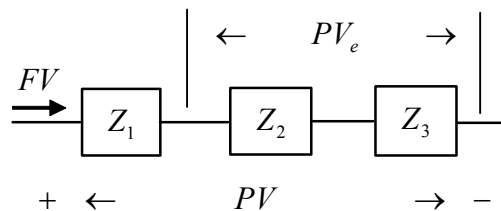


Fig. 8.54 Divizor de tensiune



$$PV_e = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \cdot PV \tag{8.91}$$

Pentru divizorul de flux din figura 8.55 sunt valabile relațiile:

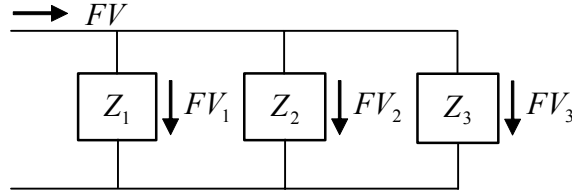


Fig. 8.55 Divizor de flux

$$FV_1 = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \cdot FV \tag{8.92}$$

$$FV_2 = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \cdot FV \tag{8.93}$$

$$FV_3 = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \cdot FV \tag{8.94}$$

Principiul de simplificare a impedanței pentru un circuit simplu este similar modului de lucru din domeniul electric.

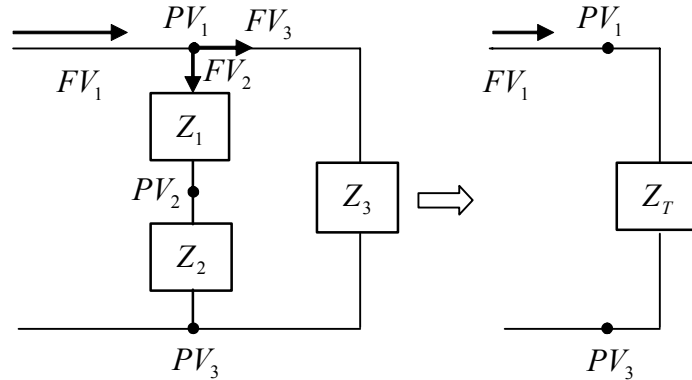


Fig. 8.56 Sistem simplu cu impedanțe

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 \tag{8.95}$$

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_3} \tag{8.96}$$

$$Z_T = \frac{Z_{12} \cdot Z_3}{Z_{12} + Z_3} \tag{8.97}$$

### 8.3.3.5.2. Exemplu pentru un circuit electric

Pentru circuitul rezonant din figura 8.57 se pot scrie relațiile de definiție a impedanțelor pentru elementele componente:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (8.98)$$

$$Z_L = j\omega L \quad (8.99)$$

$$Z_R = R \quad (8.100)$$

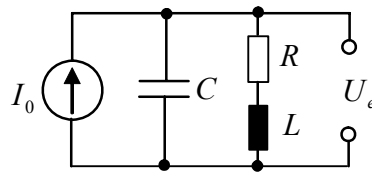


Fig. 8.57 Circuitul paralel rezonant

Substituind relațiile anterioare pentru elementele circuitului, se obține diagrama impedanțelor prezentată în figura 8.58.

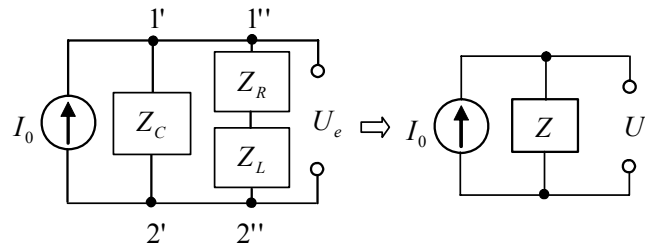


Fig. 8.58 Diagrama impedanțelor pentru circuitul rezonant

Pe principiul prezentat anterior, se poate determina impedanța echivalentă:

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (8.101)$$

și în mod corespunzător:

$$U_e = I_0 Z \quad (8.102)$$

Făcând înlocuirile și ținând cont de modul de reprezentare sistemică în planul  $s$  și planul frecvenței, se obțin relațiile:

$$s^2 U_e LC + s U_e RC + U_e = s IL + RI \quad (8.103)$$

$$LC \frac{d^2 u_e}{dt^2} + RC \frac{du_e}{dt} + u_e = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (8.104)$$

Ultima ecuație (8.105) se constituie în modelul matematic al circuitului.

**8.3.3.5.3. Exemplu pentru sistemul masă – amortizor**

Sistemul mecanic masă – amortizor, cu multiple abordări și aplicații, este prezentat în figura 8.59a. Diagrama impedanțelor echivalentă sistemului este prezentată în figura 8.59b. Având în vedere notațiile și faptul că mărimile de intrare și ieșire din sistem sunt vitezele  $\dot{x}$  și respectiv  $\dot{y}$  identificabile în metoda abordată prin parametrul potențial, forța  $f$  se identifică cu parametrul flux. În conformitate cu cele prezentate impedanțele elementelor componente ale sistemului sunt:

$$Z_c = \frac{1}{c} \tag{8.105}$$

$$Z_M = \frac{1}{j\omega M} \tag{8.106}$$

Ecuția corespunzătoare diagramei impedanțelor este:

$$PV - PV_{Z_c} - PV_{Z_M} = 0 \tag{8.107}$$

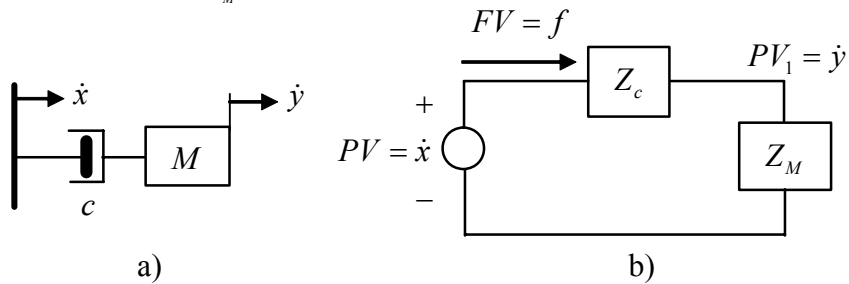


Fig. 8.59 Sistemul mecanic masă-amortizor: a- schema mecanică; b – diagrama impedanțelor

Conform notațiilor din figura 8.59 se mai pot scrie ecuațiile suplimentare:

$$PV = Z_T \cdot FV = (Z_c + Z_M) \cdot FV \tag{8.108}$$

$$PV_{Z_c} = Z_c \cdot FV \tag{8.109}$$

$$PV_{Z_M} = Z_M \cdot FV \tag{8.110}$$

$$PV_{Z_M} = PV_1 \tag{8.111}$$

După înlocuiri se obține ecuația care descrie modelul matematic al sistemului mecanic masă – amortizor:

$$\dot{y} = \frac{Z_M}{Z_M + Z_c} \cdot \dot{x} \tag{8.112}$$

### 8.3.3.6. Ecuțiile de stare ale sistemului

#### 8.3.3.6.1. Introducere

Am prezentat în § 8.3.1 noțiunea de sistem dinamic și modelul matematic general pentru un sistem continuu în timp:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{aligned} \quad (8.113)$$

unde:  $\mathbf{x}(t)$  - este vectorul de stare al sistemului;  $\mathbf{u}(t)$  - este vectorul de intrare;  $\mathbf{y}(t)$  - este vectorul de ieșire.

Într-o formă compactă, modelul matematic al sistemului poate fi descris de două ecuații:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{ecuația diferențială de stare}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{ecuația de ieșire}) \end{aligned} \quad (8.114)$$

unde:

- $\mathbf{A}_{n \times n}$  - este matricea coeficienților aferentă celor "n" stări ale sistemului;
- $\mathbf{B}_{n \times m}$  - este matricea de comandă cu "m" numărul intrărilor în sistem;
- $\mathbf{C}_{r \times m}$  - este matricea de ieșire cu "r" numărul de ieșiri;
- $\mathbf{D}_{r \times m}$  - este matricea de reacție.

*Trebuie specificat că alegerea variabilei de stare nu este unică.* În funcție de alegerea unei variabile sau a alteia care să descrie starea sistemului, se obține un sistem (8.115) de o anumită structură.

#### 8.3.3.6.2. Modelul de stare pentru un sistem liniar continuu în timp

Ecuția diferențială a unui sistem liniar este de forma:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

sau

$$y^{(n)}(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) + \dots + \frac{a_0}{a_n} y(t) = \frac{b_m}{a_n} u^{(m)}(t) + \dots + \frac{b_0}{a_n} u(t) \quad (8.115)$$

sau

$$y^{(n)}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) - \dots - \frac{a_0}{a_n} y(t) + \frac{b_m}{a_n} u^{(m)}(t) + \dots + \frac{b_0}{a_n} u(t)$$

Forma matematică a modelului se obține prin introducerea variabilelor de stare  $x_i(t)$  definite în următorul mod:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= y(t) \\
 x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\
 &\dots \\
 x_n(t) &= x_{n-1}^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t) \\
 &\text{și} \\
 \dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t)
 \end{aligned}
 \tag{8.116}$$

astfel că ecuația (8.116) se poate scrie sub forma sistemului:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
 &\dots \\
 \dot{x}_n(t) &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n - \frac{a_{n-2}}{a_n}x_{n-1} - \dots - \frac{a_0}{a_n}x_1 + \frac{b_m}{a_n}u^{(m)}(t) + \dots + \frac{b_0}{a_n}u(t)
 \end{aligned}
 \tag{8.117}$$

Din sistemul de ecuații (8.117) se determină forma restrânsă (8.114) prin identificarea termenilor matricilor **A**, **B**, **C**, **D**. De exemplu, ecuația de stare sub forma matriceală pentru un sistem de ordinul 2 este:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
 \tag{8.118}$$

Localizarea facilității de rezolvare a sistemului de stare în mediul Matlab este următoarea: *Matlab / Simulink / Continuous / State – Space* (fig.8.60).

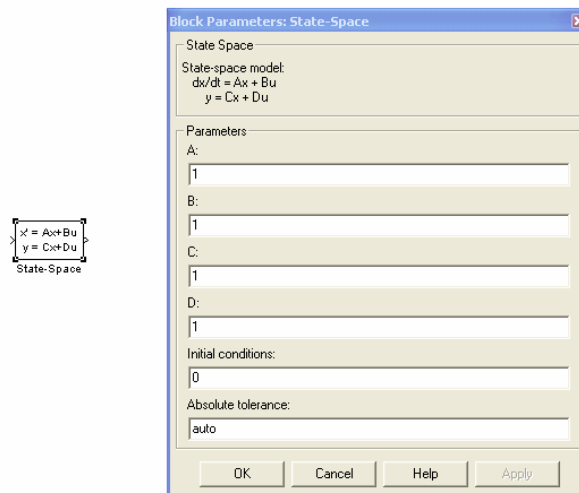


Fig. 8.60 Icon-ul și caseta de dialog din mediul MATLAB

### 8.3.3.6.3. Modelul de stare pentru sistem neliniar

Dacă sistemul (8.115) este neliniar se poate stabili pentru acesta un punct de echilibru,  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0]$ , în funcționare. Acest punct satisface sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{F}[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0] \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{G}[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0] \end{aligned} \quad (8.119)$$

Liniarizarea, sistemului admis pentru analiză, se realizează în jurul acestui punct de funcționare. Dezvoltând în serie Taylor sistemul (8.119) și reținând doar termenii de ordinul 1, se obține forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \end{aligned} \quad (8.120)$$

Ecuațiile (8.121) se pot scrie în formă concentrată:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (8.121)$$

unde:

- $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$ ,  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0$ ,  $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0$ ;
- $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}$ ,  $\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}$ ,  $\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}$ ,  $\mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}$

### 8.3.3.6.4. Exemplu de calcul

Fie circuitul R-L din figura 8.61. Ecuația care descrie modul de variație al curentului este:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i + \frac{1}{L} \cdot U_0 \quad (8.122)$$

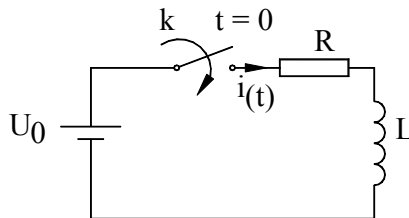


Fig. 8.61 Circuitul R-L

Fie  $x_1 = i$  și  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{di}{dt}$ , astfel că ecuația (8.122) se poate scrie:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot x_1 + \frac{1}{L} \cdot U_0 \quad (8.123)$$

Prin identificare cu sistemul (8.114) se obține:

$$\mathbf{A} = \left[ -\frac{R}{L} \right], \quad \mathbf{x} = [i], \quad \mathbf{B} = \left[ \frac{1}{L} \right], \quad \mathbf{u} = [U_0] \quad (8.124)$$

$$\mathbf{C} = [1], \quad \mathbf{D} = [0]$$

### 8.3.3.6.5. Modelul de stare pentru un sistem de levitație magnetică

Sistemul de levitație magnetică, admis în prezenta considerație, constă dintr-o bilă feromagnetică suspendată într-un câmp magnetic controlat în tensiune. Schema este prezentată în figura 8.62 [8.8]. Sistemul mecatronic de levitație magnetică este compus din următoarele subsisteme:

- Actuatorul electromagnetice reprezentat de bobina 1 cu miez feromagnetic;
- Senzorul de poziție (3, 4) pentru determinarea poziției bilei metalice 2 aflată în susținere în raport cu bobina;
- Circuite cu rol de alimentare, amplificare, control etc.

Analiza sistemului are în vedere doar mișcarea de translație în plan vertical iar obiectivul sistemului proiectat este menținerea bilei la nivelul de referință prescris.

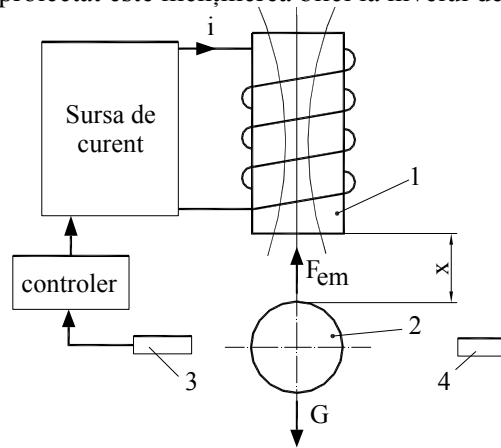


Fig. 8.62 Sistem de levitație

Bila feromagnetică se găsește sub influența a două forțe:

- Forța gravitațională “G”;
- Forța electromagnetice de susținere  $F_{em}$  datorată câmpului magnetic creat de bobina 1.

Ecilibrul bilei este definit pe baza legilor fizice de bază. Modelul matematic al

sistemului de levitație poate fi construit pe baza ecuațiilor diferențiale scrise pe principiile clasice (amintite) din domeniul mecanic, electrotehnic. Modul de abordare în aprecierea componentelor sistemului poate conduce la variante mai simple sau variante mai complexe.

Expresia bilanțului energetic în sistem este:

$$dW_e = dW_{mec} + dW_t + dW_m \quad (8.125)$$

unde termenii reprezintă variația energiei electrice ( $dW_e$ ), variația energiei mecanice ( $dW_{mec}$ ), variația energiei termice ( $dW_t$ ) și respectiv variația energiei magnetice ( $dW_m$ ).

Se poate arăta că variația energiei magnetice, când variază fluxurile magnetice și se deplasează corpuri în câmpul magnetic, este:

$$dW_m = i \cdot d\Phi - F_{em} \cdot dx \quad (8.126)$$

Forța electromagnetică de levitație se determină cu ajutorul teoremelor forțelor generalizate [8.39]:

$$F_{em} = - \left[ \frac{\partial W_m}{\partial x} \right]_{i=ct} \quad (8.127)$$

Energia magnetică proprie a unei bobine este:

$$W_m = \frac{\Phi \cdot i}{2} = \frac{Li^2}{2} \quad (8.128)$$

Calculul inductivității  $L$  se poate realiza prin calcul direct sau cu ajutorul noțiunii de reluctanță (sau permeanță) [8.39]. Literatura de specialitate specifică faptul că permeanța întrefierului – zona dintre bobină și bila feromagnetică - corespunde ariei polului doar dacă suprafața polară este mult mai mare decât grosimea întrefierului. Calculul inductivității este astfel abordat în moduri diferite în lucrările de specialitate pentru un sistem de levitație magnetică (tabelul 8.6) [8.9].

Tabelul 8.6

Var.1	Var.2	Var.3
$L(x) = L + \frac{L_0 x_0}{x}$	$L(x) = L_1 + \frac{L_0}{1 + \frac{x}{a}}$	$L(x) = L_0 + L_1 e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$

Pe baza relațiilor anterioare se pot calcula variante ale forței electromagnetice de susținere:

- pe baza relației var.3 / tabelul 8.6:

$$F_{em} = - \left[ \frac{\partial W_m}{\partial x} \right]_{i=ct} = - \frac{i^2}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} = \frac{i^2}{2} \cdot \left( \frac{2x}{x_0^2} \cdot L_1 \cdot e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \right) \quad (8.129)$$

- pe baza relației var.1 / tabelul 8.6:



$$F_{em} = - \left[ \frac{\partial W_m}{\partial x} \right]_{i=ct} = - \frac{i^2}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} = - \frac{i^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( L_1 + \frac{2K}{x} \right) = C \left( \frac{i}{x} \right)^2 \quad (8.130)$$

În contextul dat modelul dinamic al sistemului de levitație se poate particulariza pentru fiecare variantă de abordare a calcului inductivității și este descris de ecuațiile:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (8.131)$$

$$e = Ri + \frac{d[L(x)i]}{dt} \quad (8.132)$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_{em} \quad (8.133)$$

unde:  $x$  – reprezintă poziția bilei față de poziția de referință;  $v$  – reprezintă viteza bilei;  $i$  – reprezintă curentul în înfășurarea electromagnetului;  $e$  – reprezintă tensiunea de alimentare a bobinei;  $R$  – reprezintă rezistența înfășurării electromagnetului;  $L$  – reprezintă inductivitatea înfășurării;  $g$  – reprezintă accelerația gravitațională (constantă);  $m$  – reprezintă masa bilei.

O dezvoltare a modelului matematic construit se poate realiza pe baza stării sistemului considerând variabilele de stare  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [x \ v \ i]^T$  și  $u = e$ . Considerăm relația de calcul a inductivității ca fiind:

$$L = \frac{\mu_0 SN^2}{\frac{l}{\mu_r} + x} \quad (8.134)$$

unde:  $N$  reprezintă numărul de spire al înfășurării;  $S$  – aria secțiunii transversale prin fluxul magnetic;  $l$  – lungimea circuitului feromagnetic;  $x$  – mărimea întrefierului;  $\mu_0$  – permeabilitatea magnetică a vidului;  $\mu_r$  – permeabilitatea magnetică a materialului feromagnetic.

Pe baza relațiilor (8.131) – (8.134) și a variabilelor de stare considerate, se obține modelul de stare ( $k = \mu_0 SN^2$ ):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (8.135)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g - \frac{k}{2m} \left( \frac{x_3}{\frac{l}{\mu_r} + x_1} \right)^2 \quad (8.136)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{e}{k} \left( \frac{l}{\mu_r} + x_1 \right) + \left( \frac{x_2}{\frac{l}{\mu_r} + x_1} - R \cdot \frac{\frac{l}{\mu_r} + x_1}{k} \right) x_3 \quad (8.137)$$

Modelul neliniar obținut se poate liniariza pe principiul clasic de liniarizare a sistemelor (dezvoltare în serie Fourier și reținerea termenilor de ordinul 1). Pentru funcția neliniară  $f(x)$  se consideră dezvoltarea în serie Fourier în jurul punctului  $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \dots \quad (8.138)$$

Considerând notațiile  $\Delta x = x - x_0$ ,  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y = f(x)$  și neglijând termenii superiori lui 2 din dezvoltare ( $\Delta x < 1$ ,  $(\Delta x)^2 \ll 1$ ), se obține relația de liniarizare:

$$\Delta y \approx \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x \quad (8.139)$$

Pe baza relațiilor (8.135) - (8.137) se obțin parametrii punctului de echilibru:

$$x_{10} = -\frac{l}{\mu_r} + \frac{e}{R} \cdot \sqrt{\frac{k}{2mg}}; \quad x_{20} = 0; \quad x_{30} = \frac{e}{R} \quad (8.140)$$

Liniarizând modelul (8.135) – (8.137) în concordanță cu cele prezentate anterior, se obține modelul liniarizat al sistemului de levitație analizat [8.37]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{2Rg}{e} \cdot \sqrt{\frac{2mg}{k}} \cdot \Delta x_1 - \frac{2gR}{e} \cdot \Delta x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \sqrt{\frac{2mg}{k}} \cdot \Delta x_2 - \frac{e}{\sqrt{2mgk}} \cdot \Delta x_3 + \frac{e}{R\sqrt{2mgk}} \cdot \Delta e \end{aligned} \quad (8.141)$$

Forma generală a modelului de stare este:

$$\begin{cases} \dot{X} = A \cdot X + B \cdot u \\ Y = C \cdot X \end{cases} \quad (8.142)$$

unde matricile au următoarea formă de definiție:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2Rg}{e} \cdot \sqrt{\frac{2mg}{k}} & 0 & -\frac{2gR}{e} \\ 0 & \sqrt{\frac{2mg}{k}} & -\frac{e}{\sqrt{2mgk}} \end{bmatrix} \quad (8.143)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{e}{R\sqrt{2mgk}} \end{bmatrix}^T \tag{8.144}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0] \tag{8.145}$$

Relațiile (8.142) – (8.145) permit simularea funcționării sistemului și stabilirea parametrilor constructivi optimali.

### 8.3.3.7. Bond – graph

#### 8.3.3.7.1. Introducere

O metodă unitară de analiză și modelare dinamică sistemelor fizice are la bază utilizarea bond-grafurilor. Dinamica sistemului derivă din aplicarea conservării energiei în fiecare moment. Sistemele sunt conectate în locuri prin care puterea “curge” între acestea. Acest loc este denumit *port* iar subsistemele cu unul sau mai multe porturi se numesc *multiport*.

Conceptul de *port de putere* a fost introdus de Harold A. Wheeler în 1949 pentru circuitele electrice și extins mai târziu pentru alte domenii fizice (hidraulic, mecanic etc.). Acest lucru presupune (conceptual) o interacțiune între părți ale sistemului. Prin definiție *portul* reprezintă un punct de interacțiune al sistemului, subsistemului sau elementului cu mediul, un alt subsistem sau element. *Portul de putere* presupune o interacțiune cu un schimb de energie. În mod grafic acest lucru este sugerat în figura 8.63

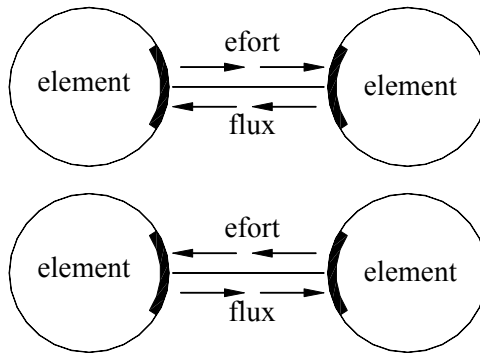


Fig. 8.63 Portul de putere

Prin *bond* se înțelege o conexiune între două porturi. Dacă cele două porturi sunt de putere, vom vorbi despre un *bond de putere* (power bond). Conceptul – *bond graph* – a fost introdus de Paynter (1961) și dezvoltat ulterior de Karnopp și Rosenberg (1968, 1975, 1983, 1990) sau utilizat în practică.

O bară scurtă și perpendiculară pe portul putere este denumită *linie cauzală* și indică sensul efortului (fig.8.64).

Pentru exemplificarea considerentului de port considerăm circuitul RLC (fig.8.65) cu binecunoscutele ecuații pentru cele trei elemente. În figura 8.66 se prezintă elementele de circuit cu porturile de putere și bond-ul de putere corespunzător.

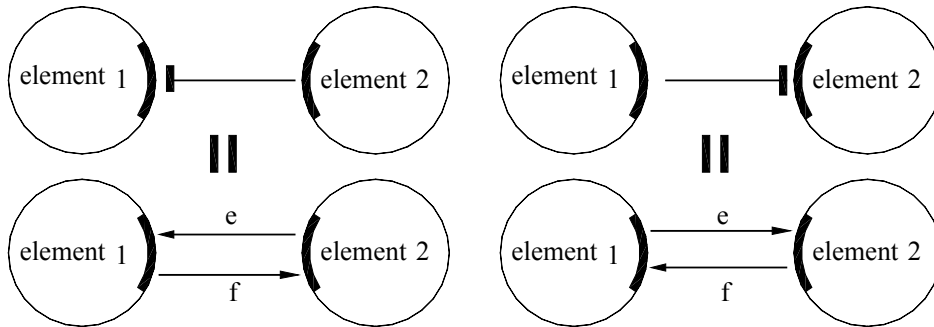


Fig. 8.64 Linie cauzală și sensul efortului

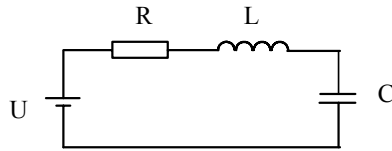


Fig. 8.65 Circuitul RLC

Fiecare port a unui sistem are patru variabile:

- Fortă (diferență de potențial) -  $e(t)$
- Flux (debit, curent) -  $f(t)$
- Efort integral -  $p = \int e(t) \cdot dt$
- Flux integral -  $q = \int f(t) \cdot dt$

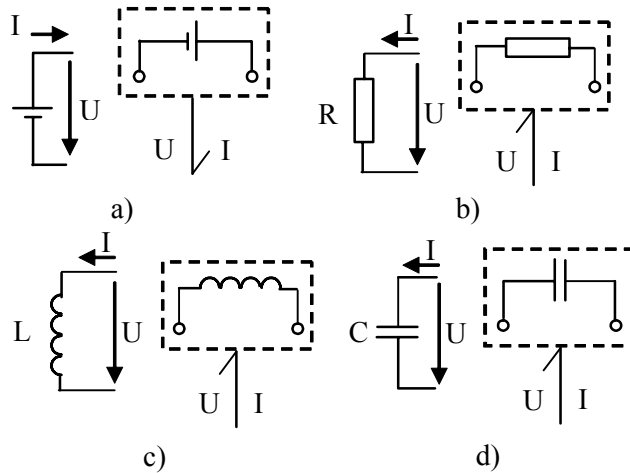


Fig. 8.66 Elementele circuitului RLC în prezentare bond-graf

Puterea pe un port este definită ca fiind:

$$P(t) = e(t) \cdot f(t)$$

(8.146)

unde  $e(t)$  și  $f(t)$  sunt variabilele puterii.

Energia vehiculată printr-un port este:

$$w = \int e(t) \cdot f(t) \cdot dt = \int e(t) \cdot d\mathfrak{Z}(t) = \int f(t) \cdot dE(t) \tag{8.147}$$

iar  $\mathfrak{Z}(t)$  și  $E(t)$  se numesc *variabilele energiei*.

Variabilele energiei și ale puterii pentru domeniile mecanic – mișcare de translație și rotație, hidraulic, electromagnetic și termic sunt prezentate în tabelul 8.7.

Tabelul 8.7

Domeniul	Efortul	Fluxul	Puterea	Efortul integral	Fluxul integral	Energie
Translație mecanică	Forța $F$	Viteza $v$	$Fv$	Impuls	Deplasarea $x$	Lucrul mecanic
Rotație mecanică	Cuplu $M$	Viteza unghiulară $\omega$	$M\omega$	Moment cinetic	Unghiul $\theta$	Lucrul mecanic
Hidraulică	Presiunea $P$	Debit $\dot{Q}$	$p\dot{Q}$	Impuls hidraulic	Volum $V$	Energia hidraulică
Electromagnetic	Tensiunea $e$	Curentul $i$	$e \cdot i$	Flux $\varphi$	Sarcina $q$	Energia electrică
Termic	Temperatura	Entropie	-	-	-	-

Componentele de bază, reprezentând diverse procese fizice, sunt (R, C, I, Se, Sf, TF, GY, 0,1). Procesele sunt divizate în următoarele categorii de bază denumite “port” în limbajul bond-graf:

- *Proces disipativ*. În acest caz energia este disipată (pierdută) în mediul înconjurător. Acesta este simbolizat în bond-graf printr-un rezistor (R). Rezistorul electric, frecarea dintr-un lagăr se poate modela printr-un element disipativ de tip R. O componentă uniport de tip rezistor (R) este caracterizată de perechea de variabile  $e(t)$  și  $f(t)$  între care există o dependență statică  $e = G(f)$  (independentă de timp).

$$e = R \cdot f \tag{8.148}$$

$$f = \frac{1}{R} \cdot e \tag{8.149}$$

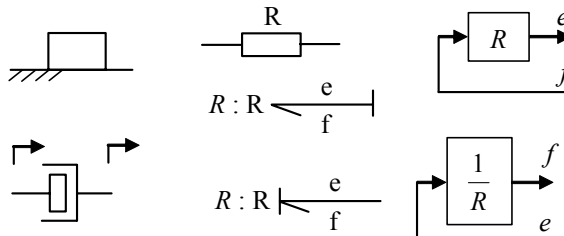


Fig. 8.67 Elementul rezitiv

- *Proces de acumulare*. În cadrul procesului conservativ al energiei, aceasta este

stocată și apoi cedată dinamic. Există două tipuri de elemente: *elemente – C* și *elemente – I*.

Pentru prima categorie în bond-graf aceste elemente sunt simbolizate în mod generalizat printr-o *element capacitate (C)* – pentru variabilă de tipul  $q$ . Capacitatea electrică, arcul elicoidal de întindere-compresiune, arcul de torsiune sunt componente constructive care aparțin acestei categorii.

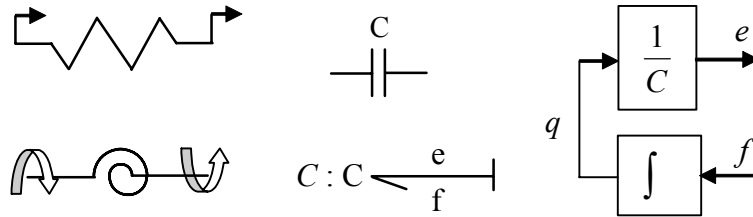


Fig. 8.68 Elementul de tip capacitiv

În cadrul acestor elemente cantitatea conservată,  $q$ , este acumulată prin stocarea fluxului net  $f$ . Acest rezultat se exprimă prin ecuația de bilanț:

$$\frac{dq}{dt} = f \quad (8.150)$$

Variabila efort,  $e$ , este exprimabilă printr-o ecuație constitutivă funcție de variabila de stare  $q$ :

$$e = e(q) \quad (8.151)$$

$$e = \frac{1}{C} \cdot q \quad (8.152)$$

$$q = \int f dt + q(0) \quad (8.153)$$

Pentru elementele –  $I$ , cantitatea conservată  $p$  este stocată prin acumularea efortului  $e$ . Inductivitatea electrică  $L$ , masa  $M$ , volantul sunt elemente constructive care aparțin acestei categorii.

Ecuția de bilanț are forma:

$$\frac{dp}{dt} = f \quad (8.154)$$

existând și o ecuație constitutivă de forma:

$$f = f(p) \quad (8.155)$$

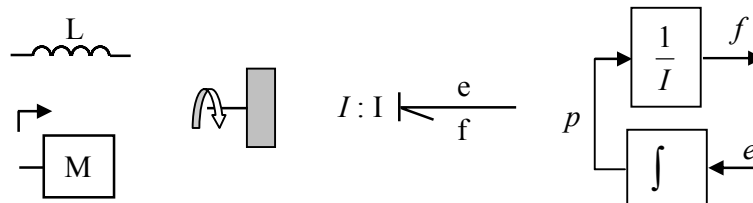


Fig. 8.69 Elementul de tip inductiv

Ecuțiile specifice ale elementului sunt:

$$f = \frac{1}{I} \cdot p \tag{8.156}$$

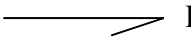
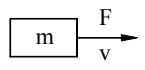
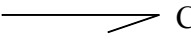
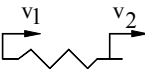
$$p = \int edt + p(0) \tag{8.157}$$

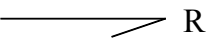
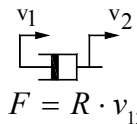
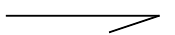
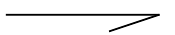

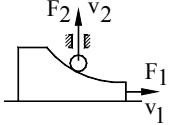

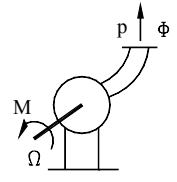
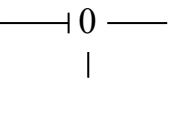
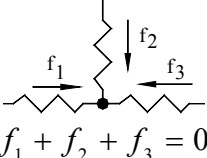
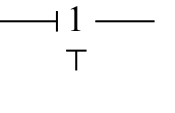
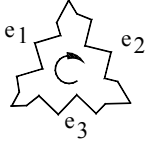




- *Sursă.* Se includ în această categorie două cazuri : o sursă de efort  $S_e$  și o sursă de flux  $S_f$ . De ex: în domeniul electric o sursă de tensiune sau o sursă de curent intră în această categorie; în domeniul hidraulic o pompă asigură presiunea necesară în circuitul hidraulic.
- *Proces de conversie.* Un transformator generalizat (TR) simbolizează acest proces. Efortul  $e_1$  și respectiv fluxul  $f_1$  se vor transforma în  $e_2$  și respectiv  $f_2$  respectându-se relațiile  $e_1 = n \cdot e_2$  și  $n \cdot f_1 = f_2$ . Un exemplu tipic pentru acest caz este transmisia prin roți dințate. În cazul unei conversii calitative simbolizarea corespunde termenului (GY) (gyrator) caz în care se respectă relațiile  $e_1 = r \cdot f_2$ ,  $e_2 = r \cdot f_1$ . De ex.: o pompă cu roți dințate acționată electric realizează conversia energie electrică → energie hidraulică; motorul electric realizează conversia energie electrică → energie mecanică.
- *Proces de distribuție.* Asemănător circuitelor electrice fluxul energetic în cazul teoriei bondgraf este reprezentat în mod paralel sau serial. Joncțiunea din acest caz este echivalentă nodului din circuitele electrice ( Kirchhoff – I). Există două tipuri de joncțiuni: *joncțiune 0* echivalentă conexiunilor în paralel din electrotehnică și *joncțiune 1* echivalentă conexiunilor seriale. Pentru joncțiunea 0 este valabilă relația  $\sum f_i = 0$ . Într-o joncțiune 1 suma variabilelor efort la același flux este  $\sum e_i = 0$

Toate componentele analizate anterior sunt conectate cu legătură de putere simbolizată în notațiile grafurilor prin “—”. Terminația din dreapta reprezentării semnifică direcția fluxului de putere din circuit.

Simboluri și terminologie din domeniul bondgraf sunt prezentate în tabelul 8.8

Tabelul 8.8

Denumire	Simbol	Utilizare în teoria grafurilor	Comentariu
Efect inerțial	I		 $v = v_0 + \frac{1}{m} \cdot \int F \cdot dt$
Efect capacitive	C		 $F = F_0 + \frac{1}{m} \cdot \int v_{12} \cdot dt$

Efect rezistiv	R		 $F = R \cdot v_{12}$
Sursă	Se		Efortul este constant
	Sf		Fluxul este constant
Transformator	TF		 $F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2$
	GY		 $p \cdot \Phi = M \cdot \Omega$
Joncțiune "0"	0		 $f_1 + f_2 + f_3 = 0$
Joncțiune "1"	1		 $e_1 + e_2 + e_3 = 0$
Direcția fluxului de putere			-
Cauzalitate			-
			

Metoda bondgraf permite echivalări ale schemelor pentru reducerea complexității schemei inițiale. Într-o analiză liniară un port cu cauzalitate de ieșire-efort este caracterizat prin impedanță iar un port cu cauzalitate efort de ieșire este descrisă prin admitanță (tabelul 8.9).

Proprietățile cauzale ale portului se pot încadra în:

- Porturi cu *cauzalitate fixată*. Prin definiție, nu există decât o singură opțiune pentru cauzalitate. Un exemplu caracteristic acestei clase este sursa de efort Se (cauzalitate a efortului de ieșire fixată) sau sursa de flux Sf (cauzalitate a fluxului de ieșire fixată).



- Porturi cu *cauzalitate preferată*. Proprietatea se referă la condiționări impuse pentru aplicarea unei metode sau a alteia de lucru. De ex.: integrarea numerică este preferată diferențierii numerice în procesele de simulare;
- Porturi cu cauzalitate *arbitrară* sau *liberă*. De ex: pentru un rezistor electric pornind de la curentul care îl străbate se poate determina căderea de tensiune pe el sau invers;
- Porturi cu *constrângeri cauzale*. Acest aspect se întâlnește în cazul multiporturilor . De ex: în cazul joncțiunilor (un singur flux de ieșire pentru o joncțiune “0” și o cauzalitate unică pentru efort de ieșire în cazul joncțiunii “1”), TF (un singur efort și respectiv un singur flux causal).

Tabelul 8.9

Impedanță	Admitanță

Modul de caracterizare prin prisma impedanței și admitanței în cazul elementelor de conversie este prezentat în figura 8.70.

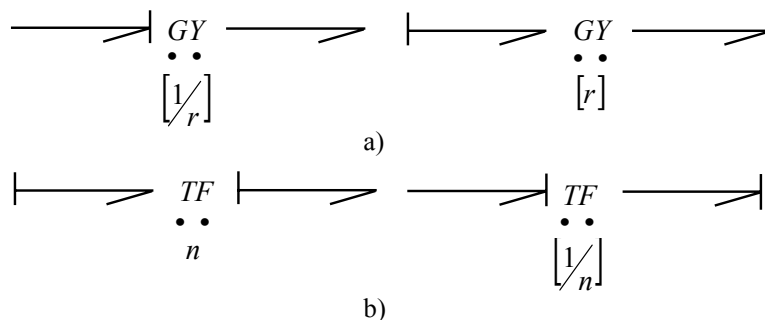


Fig. 8.70 Elementele de conversie și caracterizarea lor

Modul de aplicare a regulilor de compoziție în joncțiunea “1” este prezentat în figura 8.71.

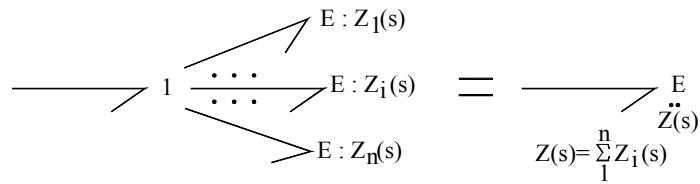


Fig. 8.71 Regulile de compoziție pentru joncțiunea “1”

8.3.3.7.2. Modelarea în bond-graph

Una din metodele de bază în modelarea și simularea sistemelor fizice în mecatronică este metoda bond-graph, care se bazează pe principiile teoretice de echivalare prezentate anterior. Trei domenii diferite cu elemente reprezentative definatorii pentru fiecare – rezervor (fig.8.72a), condensator (fig.8.72b) și respectiv element elastic (fig.8.72c) fac corelația cu un același element din teoria bond-graf (fig.8.72d).

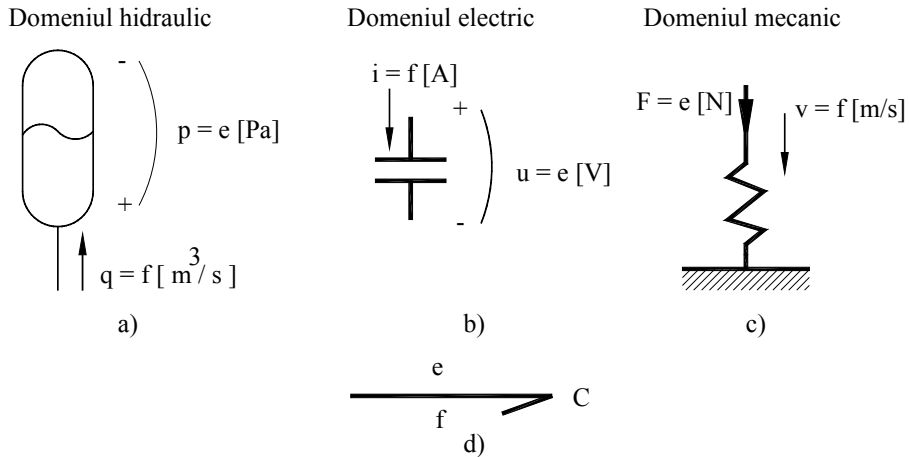


Fig. 8.72 Reprezentarea prin același element bond-graph a unor elemente constructive diferite

Echivalența dintre circuitul electric paralel RC (fig.8.73a) și un sistem mecanic cu elasticitatea K, amortizarea C solicitat de o forță F (fig.8.73b) este prezentat în figura 8.73c.

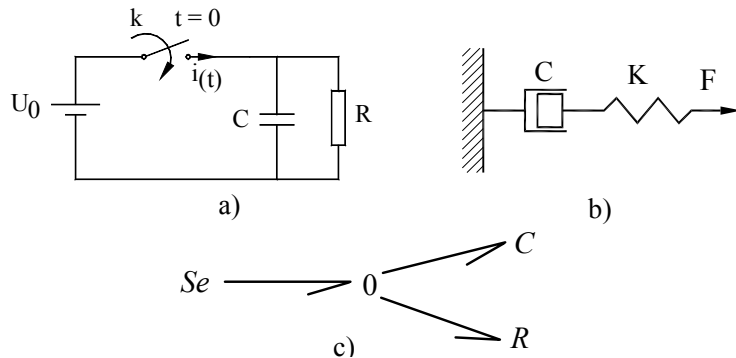


Fig. 8.73 Echivalența în reprezentare

Trecerea de la un “obiect” dat – un sistem hidraulic – spre un model de calcul este sugerat în figura 8.74.

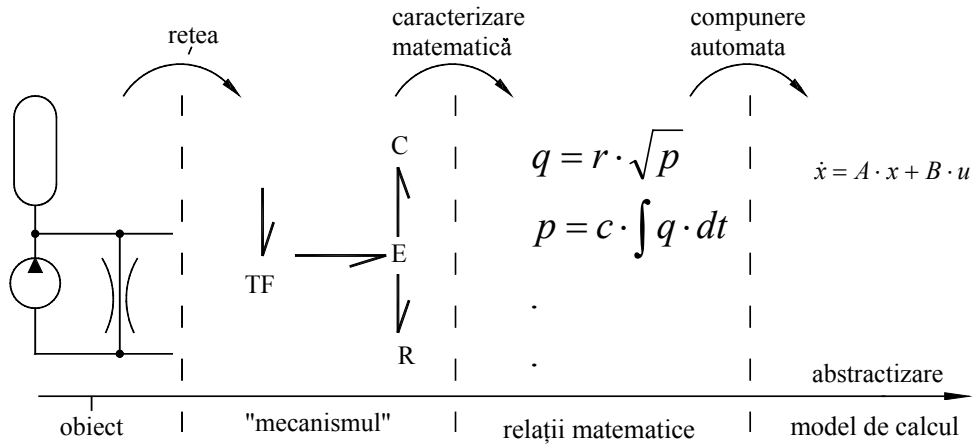


Fig. 8.74 Modelarea unui sistem hidraulic

### 8.3.4. Modelarea sistemelor electromagnetice

Teoria sistemelor fizice are la bază noțiunea de energie ( E ) definită ca puterea acumulată în timp. Pornind de la acest aspect se introduce noțiunea de putere generalizată  $\Pi$  ca produsul a două mărimi cantitative fizice, observabile și complementare: cantități dintre două puncte ( $\alpha$  )(across) și respectiv dintr-un punct ( $\tau$  ) (through). Abordările anterioare nu sunt singulare. Termenilor anteriori, în teoria sistemelor fizice, li se adaugă și echivalența efort – e (effort) și flux (debit) – f (flow). Între cele două moduri de definire există aproape o identitate. În același timp, conform principiilor fizice de funcționare ale sistemelor, se poate introduce noțiunea de porturi de putere prin care sistemele interacționează între ele făcând schimb de energie (multiport)(fig.8.75).

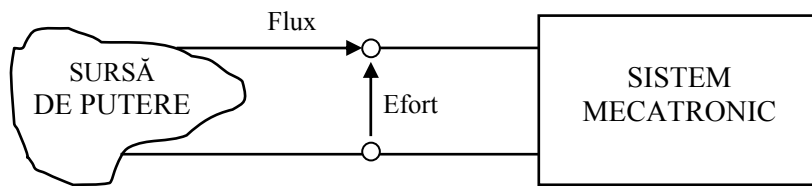


Fig. 8.75 Variabile generalizate și port de putere

Pentru modelarea sistemelor se poate apela la diverse principii și metode. Un caz aparte îl constituie sistemele electromecanice. Principiile mecanicii newtoniene sunt în general simple ca formă dar cu unele greutăți în aplicații. Aceste aspecte l-au determinat pe Lagrange la elaborarea mecanicii analitice: “o mecanică a sistemelor – cu număr finit de parametri care să nu utilizeze nici o figură concretă”. Mecanica lagrangeană, mecanica sistemelor neolonome, mecanica hamiltoniană, principiile variaționale etc. sunt modalități de lucru introduse de mecanica analitică.

Metodele variaționale și principiile extremului se pot aplica cu succes în analiza sistemelor tehnice complexe. Trebuie menționată restricția impusă pentru aplicabilitatea la sisteme cu parametri concentrați caracterizați de variabilele *efort și flux*. Studiul sistemelor cu parametri concentrați permite o clasificare a elementelor energetice astfel: surse de energie (surse de efort și surse de flux), acumulator de energie (acumulator de efort și acumulator de flux) și disipatoare de energie [8.30].

Aceste metode utilizează variabilele echivalente acumulării de efort și de flux. Se pot defini astfel:

$$q = \int_0^t e(t) \cdot dt \quad \text{-- acumulare efort} \quad (8.158)$$

$$p = \int_0^t f(t) \cdot dt \quad \text{-- acumulare flux} \quad (8.159)$$

și energia stocată (fig.8.76):

$$W = \int_0^t e f dt \quad (8.160)$$

$$U = \int_0^p \phi(p) \cdot dp \quad (8.161)$$

$$T = \int_0^q \varphi(q) \cdot dq \quad (8.162)$$

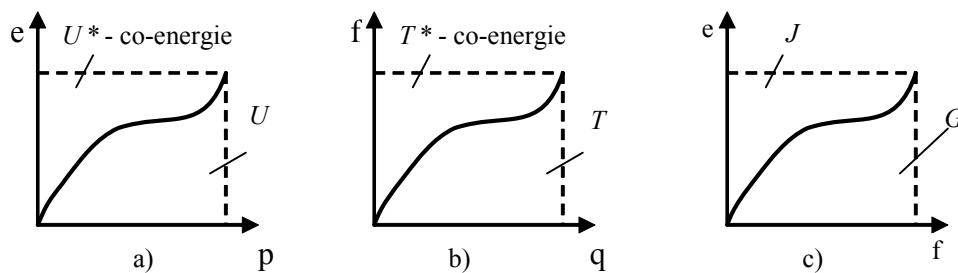


Fig. 8.76 Energia acumulată (a, b) și puterea disipată (c)

În cazul elementelor disipative, relația constitutivă pentru puterea instantanee este:

$$ef = \int_0^f e \cdot df + \int_0^e f \cdot de = G + J \quad (8.163)$$

unde semnificația variabilelor  $G, J$  este ilustrată în figura 8.76c

Dezvoltarea unei analize variaționale pentru modelarea sistemului mecatronic se poate realiza în varianta nodală și varianta ciclu (fig.8.77). Echivalența variantelor de

lucru cu jonțiunea “0” și “1” din metoda bond-graph este prezentată în figura 8.78. Soluțiile variaționale pentru problemele de modelare dinamică își au originea în lucrările lui Hamilton și Lagrange.

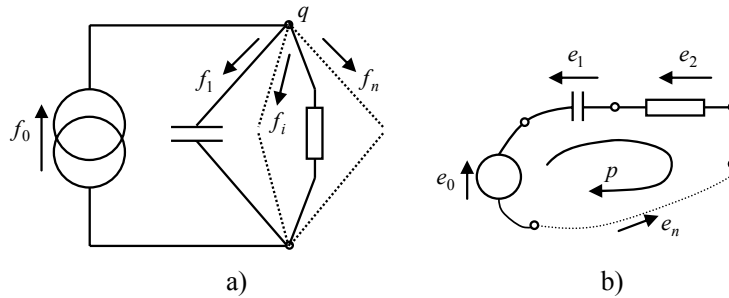


Fig. 8.77 Varianta nodală și ciclul a modelului structural

Punctul de start în analiza variațională este lucrul mecanic elementar definit prin relațiile:

$$\delta I = \left( f_0 - \sum_j f_j \right) \cdot \delta q \tag{8.164}$$

$$\delta K = \left( e_0 - \sum_j e_j \right) \cdot \delta p \tag{8.165}$$

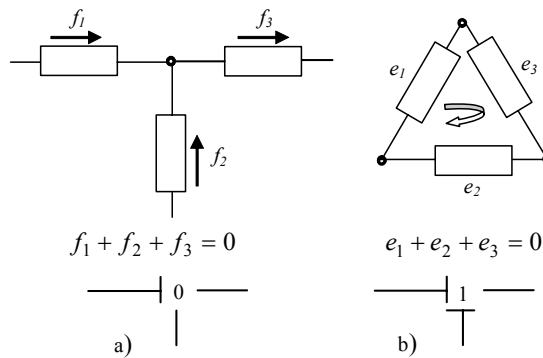


Fig. 8.78 Echivalența dintre variantele de analiză și jonțiunile „0” și „1”

Indicatorii variaționali pentru cele două cazuri se indică prin:

$$\delta V = \int_{t_0}^{t_1} \delta I \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta U^* - \delta T - \sum_j \left( \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_j} - f_j \right) \delta q_j \right] \cdot dt = 0 \tag{8.166}$$

$$\delta Y = \int_{t_0}^{t_1} \delta K \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta T^* - \delta U - \sum_j \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{p}_j} - e_j \right) \delta p_j \right] \cdot dt = 0 \tag{8.167}$$

Ecuatiile (8.166) și (8.167) sunt o extensie a principiului lui Hamilton: pentru o mișcare naturală între două configurații fixe, de acumulare a efortului / fluxului între

momentele  $t_0$  și  $t_1$ , indicatorii  $\delta V$  și  $\delta Y$  trebuie să se anuleze” [8.42].

În conformitate cu acest principiu trebuie satisfăcute următoarele ecuații:

- Ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_j} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (8.168)$$

unde lagrangeanul este definit prin:

$$L = U^* - T \quad (8.169)$$

- Ecuațiile co-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_j} \right] - \frac{\partial L^*}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial \dot{p}_j} = e_j, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (8.170)$$

unde co-lagrangeanul este definit prin:

$$L^* = T^* - U \quad (8.171)$$

În figura 8.79 se prezintă structura principală a unui sistem electromecanic pentru care se dorește modelarea. Un condensator cu o armătură mobilă de masă  $m$  este conectat la o sursă de tensiune iar pe de altă parte este conectat față de un element fix printr-un amortizor cu constanta  $c$  și un element elastic cu constanta  $k$  [8.27], [8.10].

Lagrangeanul compus al sistemului analizat este:

$$L = L_{mec} + L_{el} = U_{mec}^* - T_{mec} + T_{el}^* - U_{el} \quad (8.172)$$

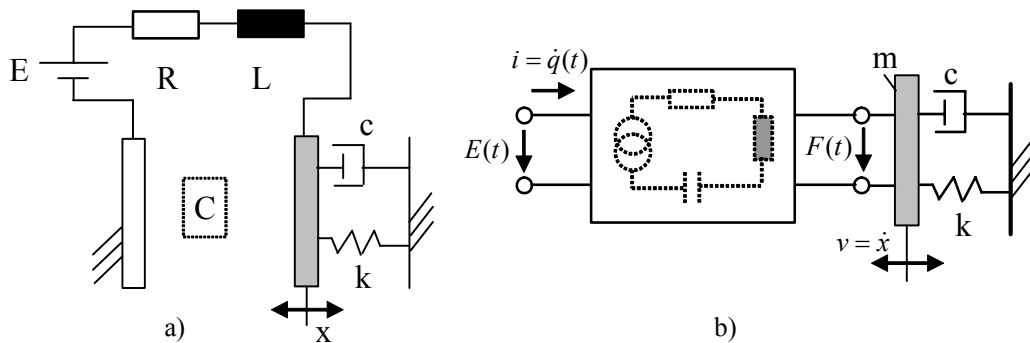


Fig. 8.79 Microfon capacitiv și modelul sistemului

Pentru coordonatele generalizate  $i = \dot{q}(t)$  și  $x(t)$  și în ipoteza unui efort liniar, există relația:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{q^2}{2C} \quad (8.173)$$

Co-capacitatea compusă a sistemului este:

$$J = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 + \frac{1}{2} b \dot{x}^2 \quad (8.174)$$

Sistemul compus – subsistemul electric și subsistemul mecanic – este caracterizat prin două *eforturi efective*  $E(t)$  și  $F(t)$ . Forța  $F(t)$  apare ca urmare a interacțiunii între armăturile condensatorului C:

$$\begin{aligned} F(t) &= -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{CV^2}{2}\right)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{2C}\right)\right) = \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r A}\right)\right) = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \end{aligned} \quad (8.175)$$

Utilizând relațiile anterioare de definire, se obțin ecuațiile diferențiale care constituie modelul matematic al sistemului electromecanic [8.10]:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E(t) \quad (8.176)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r A} = F(t) \quad (8.177)$$

## 8.4. Simularea sistemelor mecatronice

### 8.4.1. Programare grafică și textuală în modelare / simulare

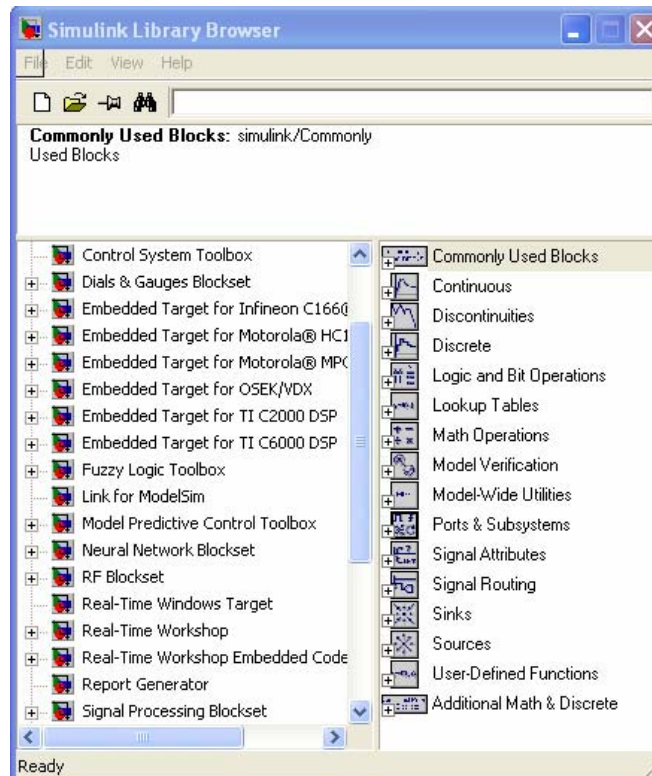
Modelarea și simularea sunt utilizate pentru obținerea unor rezultate despre acțiuni într-un mediu virtual, cu intenția de a evalua aceste rezultate în raport cu acțiuni similare în mediul real.

Limbajele de nivel înalt (de ex. FORTRAN și C / C++) sunt utilizate pentru dezvoltarea modelelor și codurilor pentru simulare. Acestea au marele avantaj că utilizatorul nu trebuie să aibă cunoștințe avansate de programare și că sunt disponibile unelte și tehnici de modelare grafică foarte rapide și intuitive. În scopul eliminării efortului de scriere separată a codurilor pentru fiecare aplicație în parte, s-a apelat la limbaje cu caracter general (ACSL, SIMMON, DESIRE, etc.).

O aplicabilitate extinsă au atins-o limbajele de programare grafică. Noile limbaje au fost dezvoltate pentru diverse domenii de inginerie:

- SPICE, Electronics WorkBench sunt exemple pentru circuitele electrice și electronice. Modul de lucru este conform topologiei circuitelor.
- Working Model este un exemplu de simulator pentru sistemele mecanice bazat pe o construcție grafică și utilizarea parametrilor concentrați.
- LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench) este un mediu de programare bazat pe limbajul de programare grafică G. LabView promovează și aderă la conceptul de programare modulară, asemănător cu mediile de programare C, C++, PASCAL etc.

*MATLAB (MATrix LABORatory)* este un pachet de programe de înalta performanță dedicat calculului numeric și a reprezentărilor grafice. Simulink este parte integrantă a acestui pachet software. Simulink permite modelarea, simularea și analiza dinamică a sistemelor și este bazat pe programarea grafică în care se utilizează un editor de scheme bloc. Sunt acceptate sisteme liniare și neliniare, continue sau discrete.



**Fig. 8.80** Biblioteca Matlab / Simulink [8.43]

*LabView* este un mediu de lucru pentru construcția instrumentației virtuale (Virtual Instruments – VI) destinate monitorizării și controlului proceselor (fig.8.81).

Un VI are trei componente:

- panoul frontal – corespunde la interfața grafică cu utilizatorul sau ceea ce va vedea utilizatorul pe ecranul monitorului;
- diagrama bloc – corespunde codului programului și definește funcționalitatea VI – lui pe baza operatorilor clasici, funcțiilor ș.a.m.d.;
- pictograma și conectorul corespund “semnăturii” programului. Pictograma (icon-ul) este identificatorul grafic al VI. Terminalele de intrare și ieșire corespund parametrilor de intrare / ieșire.

Un loc aparte în lista limbajelor pentru modelare / simulare îl ocupă limbajele orientate obiect. *Modelica* este un limbaj pentru modelarea sistemelor fizice, proiectat pentru a susține dezvoltarea de biblioteci de lucru și schimbarea modelului. Modelica este un limbaj modern bazat pe ecuații matematice și orientare obiect. Acest limbaj dispune de o puternică bibliotecă Modelica Standard Library (fig.8.82). Modelica este



structurat unitar pe bază de: class, model, block, function, connector, package, record, type. Limbajul Modelica și biblioteca MSL necesită existența unui Modelica translator pentru a putea fi utilizat într-un mediu de simulare [8.23].

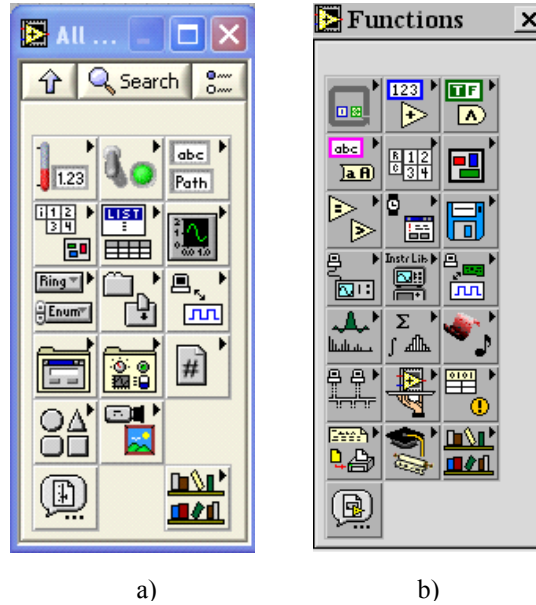


Fig. 8.81 Controale și funcții în LabView [8.50]



Fig. 8.82 Biblioteca standard Modelica [8.23]

*Dymola – Dynamic Modeling Laboratory* – este un mediu pentru modelarea și simularea sistemelor complexe. Dymola este bazat pe Modelica® și dispune de Modelica translator și de o serie de biblioteci de lucru compatibile cu Modelica Standard Library: MultiBody Library, PowerTrain Library, Hydraulics Library, Pneumatics Library, VehicleDynamics Library, AirConditioning Library. Dymola este proiectat pentru a lucra cu diverse alte medii de lucru pentru modelare / simulare (fig.8.83) [8.44].

*In nivelul model*, modelele sunt compuse pornind de la biblioteca de componente (Modelica standard, alte biblioteci comerciale sau particulare) și dezvoltate în continuare de utilizator. Modelul de detaliu poate fi importat din pachetul CAD. Formatele de lucru pot fi DXF sau STL. Se pot obține astfel informații referitoare la masa și inerția componentelor mecanice 3D, la topologia sistemului mobil. Icon-ul componentei se poate defini fie în grafica asociată modelului Dymola fie prin importare dintr-un alt mediu de lucru grafic.

*In nivelul simulare*, Dymola transformă modelul descris într-un cod de simulare. Dymola dispune de un mediu complet de simulare dar poate și exporta codul pentru

simulare în Matlab / Simulink. În mod suplimentar pentru o simulare offline, Dymola poate genera un cod pentru hardware specializat: dSPACE, xPC și altele.

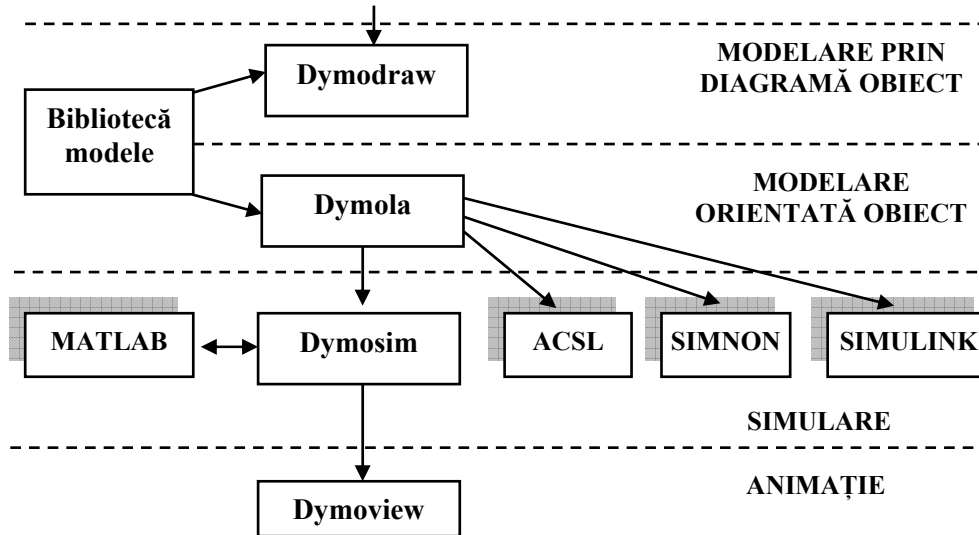


Fig. 8.83 Modelare / simulare cu Dymola

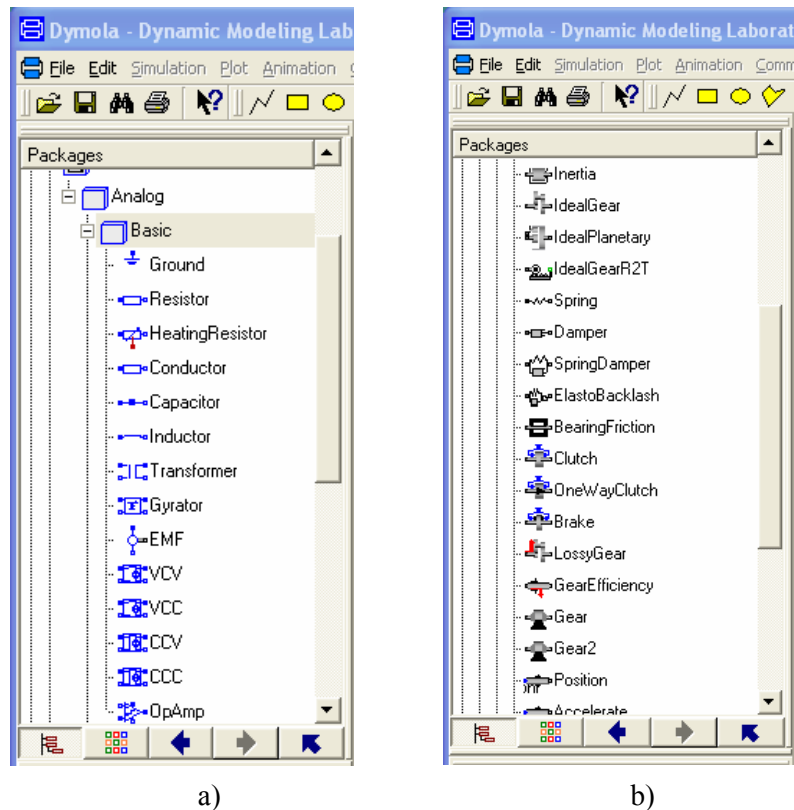


Fig. 8.84 Clasa „obiecte” electrice (a) și mecanice (b) [8.44]

20-SIM (Twente Sim) este un program avansat de modelare și simulare dinamică a sistemelor complexe (mecanice, electrice, hidraulice etc.). Acest program, dezvoltat de Control Laboratory of the University of Twente (Olanda) permite crearea modelului prin utilizarea ecuațiilor, schemelor bloc, bond-graph, diagrame icon sau combinații ale acestora (fig.8.85 – 8.88) [8.45].

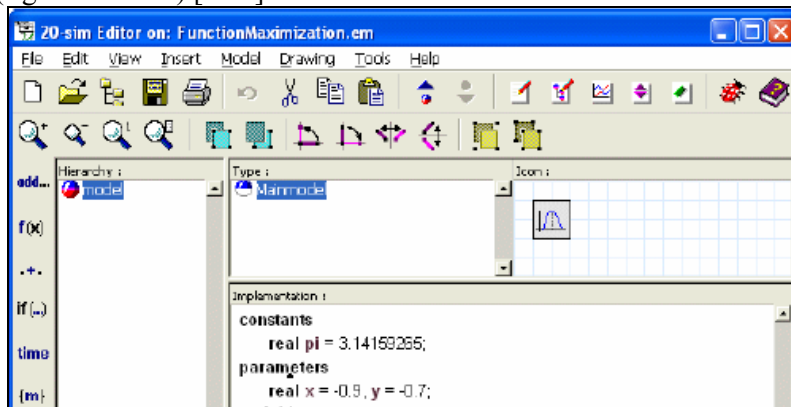


Fig. 8.85 Modelare pe bază de ecuații

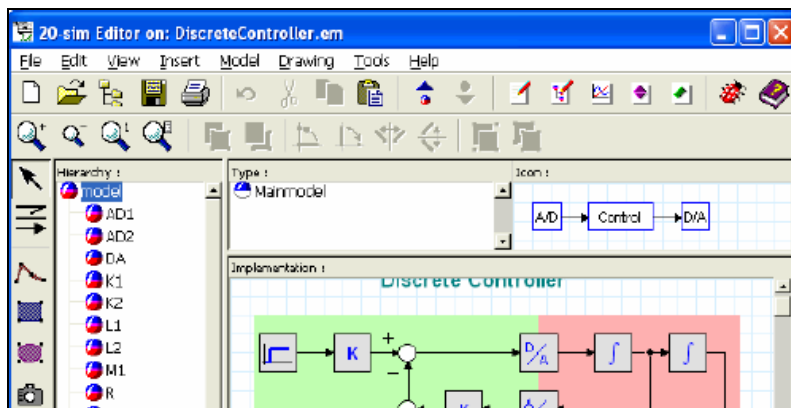


Fig. 8.86 Modelare pe bază de scheme bloc

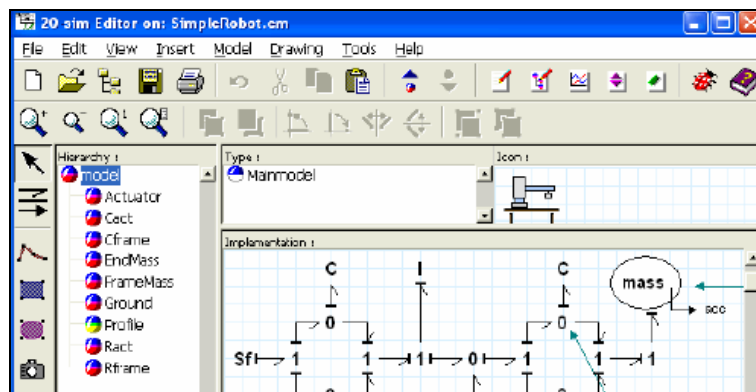


Fig. 8.87 Modelare bond-graph

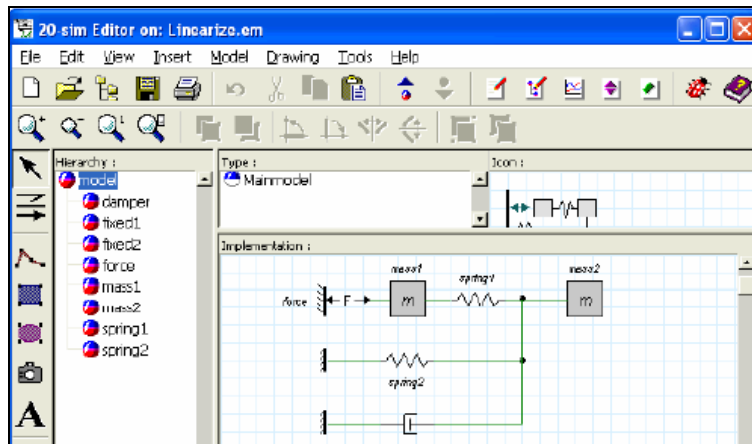


Fig. 8.88 Modelare pe bază de icon-uri

### 8.4.2. Modelarea și simularea forțelor de frecare din sistemele mecatronice

#### 8.4.2.1. Modele ale frecării

Se consideră că la nivelul sistemelor de acționare trei neliniarități sunt dominante din punct de vedere mecanic: frecarea, jocul și elasticitatea. Prezența acestora și modul de manifestare conduc la o funcționare deficientă. Sistemele mecatronice – sisteme flexibile robotizate, mașinile unelte, sistemele complexe de măsurare, robotica medicală etc. - sunt domenii în care frecarea înrăutățește parametrii calitativi ai sistemului.

Compensarea frecării este una din direcțiile abordate de conceptul mecatronic. Una din posibilitățile avute în vedere de proiectarea mecatronică este integrarea software orientată spre compensarea neliniarităților din sistem prin algoritmi adecvați. Din acest motiv modelarea și simularea forțelor de frecare are o importanță aparte.

Frecarea ca și fenomen, parametrii care o determină sau care o influențează și modelele frecării au fost abordate de literatura de specialitate [8.36].

Se consideră la ora actuală că se poate vorbi despre un model clasic al frecării (modelul static, dinamic sau cel vâcos) (fig. 8.89) și modelul modern al frecării. Zona "A" definește zona de discontinuitate a modelului pentru viteza relativă zero.

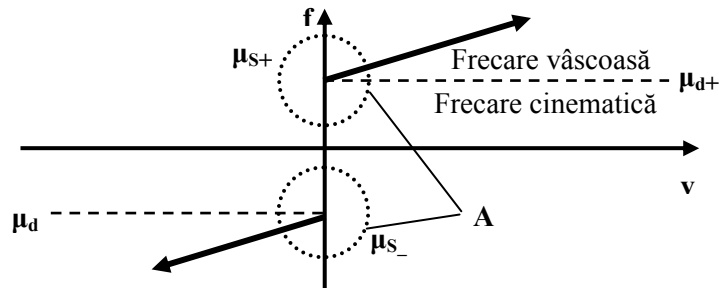


Fig. 8.89 Modelul clasic al frecării

*Modelul de bază Coulomb* al frecării pornește de la proporționalitatea forței de frecare cu forța normală la suprafață și de sens opus mișcării (Leonardo da Vinci). Armstrong – Helouvry, Da Vinci, Amonton folosesc același model dezvoltat de Coulomb în 1785. Frecarea este luată în considerare ca o forță constantă opusă mișcării pentru orice viteză diferită de zero.

Ecuția de mișcare a unei mase “m”, asupra căreia se exercită o forță de frecare, are forma:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F - F_f \tag{8.178}$$

Modelul matematic este descris de sistemul de ecuații:

$$F_f = \begin{cases} F_0 \operatorname{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) \text{ la } \frac{dx}{dt} \neq 0 \\ + F_0 \text{ la } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ si } F > F_0 \\ - F_0 \text{ la } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ si } F < -F_0 \\ F \text{ la } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ si } |F| \leq F_0 \end{cases}$$

*Modelul Coulomb* a fost dezvoltat în timp rămânând ca o referință de bază și primind denumirea de modelul clasic. Unul din modelele dezvoltate, modelul clasic stick-slip, este prezentat în figura 8.90 iar modelul modern al frecării în figura 8.91.

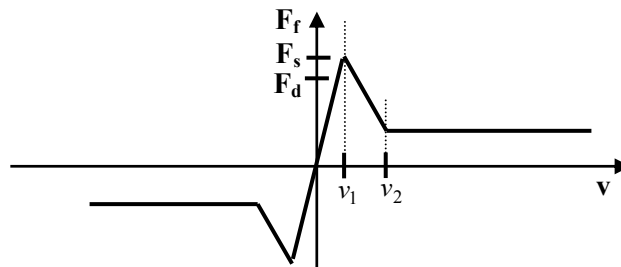


Fig. 8.90 Modelul clasic stick-slip

*Modelul modern* - modelul rolling, modelul Stribeck, modelul Stick-slip, modelul fluidic- este caracterizat de zonele {1, 2, 3} care indică prezența lubrificării limită, a lubrificării parțial fluidice și respectiv a lubrificării total fluidice (fig.8.91).

*Modelul Dahl* introduce în 1968 un model al frecării solide sub forma unei ecuații diferențiale de ordinul I. Modelul matematic este descris de ecuația:

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left| 1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right|^i \cdot \left( 1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right) \tag{8.179}$$

unde  $\sigma$  este înclinarea diagramei de frecare la  $F = 0$  ;  $F_c$  este forța de frecare și  $i$  este un parametru empiric care ajustează înclinarea diagramei.

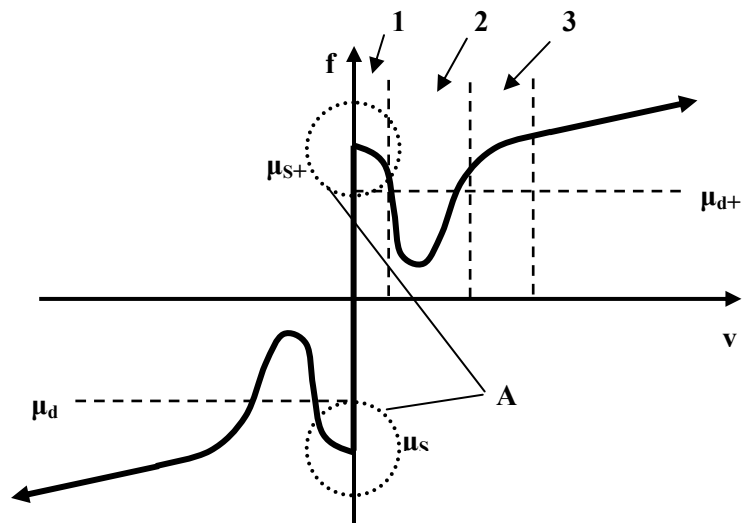


Fig. 8.91 Modelul modern al frecării

*Modelul Karnopp* (1985) a propus un model pentru a elimina deficiențele de simulare a procesului în jurul vitezei zero. Modelul matematic este exprimat prin ecuația:

$$F_f = \begin{cases} C_n \operatorname{sgn}(\dot{x}) + b_n \dot{x} & \text{for } \dot{x} < -\Delta v \\ \max(D_n, F_a) & \text{for } -\Delta v < \dot{x} < 0 \\ \min(D_p, F_a) & \text{for } 0 < \dot{x} < \Delta v \\ C_p \operatorname{sgn}(\dot{x}) + b_p \dot{x} & \text{for } \dot{x} > \Delta v \end{cases} \quad (8.180)$$

unde:  $C_p$  și  $C_n$  este valoarea pozitivă și respectiv negativă a frecării dinamice;  $b_p$  și  $b_n$  sunt valorile coeficienților de frecare vâscoasă;  $\dot{x}$  este viteza relativă dintre suprafețele în contact;  $D_p$  și  $D_n$  sunt valorile (pozitivă și negativă) ale frecării statice;  $\Delta v$  este valoarea intervalului în care viteza se consideră zero;  $F_a$  este suma forțelor exterioare (altele decât frecarea) aplicate în sistem. Modelul dezvoltat este prezentat în figura 8.92

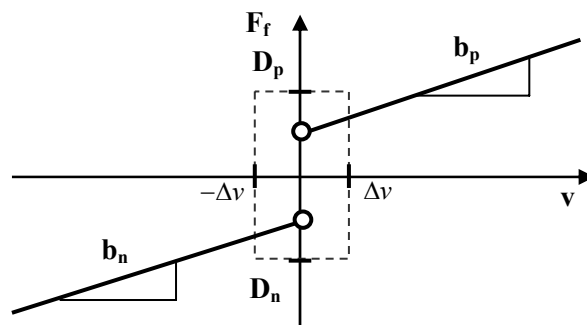


Fig. 8.92 Modelul Karnopp modificat

Pentru analiză sau simulare este important de a avea un model matematic al frecării de regim stabilizat dependent de viteză. Hess și Soom au propus un model descris sub forma:

$$F(\dot{x}) = F_C + \frac{(F_S - F_C)}{1 + \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_S}\right)^2} + F_V \cdot \dot{x} \quad (8.181)$$

Bo și Pavelescu au adus modificări modelului printr-o reprezentare exponențială de forma [8.2]:

$$F(\dot{x}) = F_C + (F_S - F_C) \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_S}\right)^\delta} + F_V \cdot \dot{x} \quad (8.182)$$

unde:  $F_C$  este valoarea minimă a forței de frecare coulombiene;  $F_S$  este nivelul pentru frecarea statică;  $\dot{x}_S$  și  $\delta$  sunt parametri empirici.

O extensie a modelului Dahl este dezvoltată prin modelul LuGree (Lund – Grenoble) care ține cont de frecarea Coulomb și frecarea vâscoasă, curba de frecare Stribeck, și frecarea statică:

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \quad (8.183)$$

unde  $z$  reprezintă starea de solicitare în zona de contact / frecare,  $\sigma_0$  și  $\sigma_2$  sunt parametrii pentru frecarea – Coulomb și frecarea vâscoasă și  $\sigma_1$  reprezintă amortizarea pentru complianța tangențială. Parametrul de presetare  $z$  are expresia:

$$\dot{z} = v \cdot \left(1 - \frac{\sigma_0}{g(v)} \cdot \text{sgn}(v) \cdot z\right) \quad (8.184)$$

unde  $g(v)$  este funcția care descrie efectul Stribeck.

#### 8.4.2.2. Simularea fenomenului de frecare

Implementarea modelului matematic al frecării într-un proces de simulare este facilitată de modelul bloc din mediul Matlab / Simulink. În figura 8.93 este prezentat modelul Simulink corespunzător ecuației (8.94) și în care s-a utilizat blocul “Coulomb & Viscous Friction” [8.36].

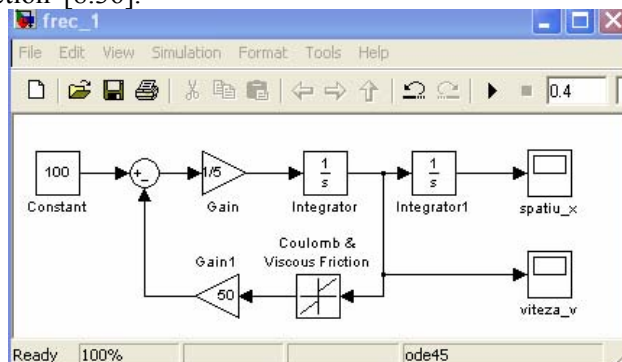


Fig. 8.93 Modelul Matlab / Simulink al masei în mișcare cu frecare

Modelele dezvoltate depind de o serie de parametri iar cunoașterea este caracterizată de o anumită incertitudine. Specific sistemelor mecatronice rezolvarea problemei presupune o identificare a parametrilor. Procesul de identificare este un proces iterativ de optimizare a parametrilor și validare a modelului matematic agreat în studiu. Pornind de la acest considerent dezvoltarea unor instrumente virtuale în mediul LabVIEW este recomandată având în vedere posibilitatea de a utiliza mediul de lucru pentru achiziția de date. În figura 8.94 se prezintă diagramele echivalente (a, si b) și icon-ul asociat instrumentului virtual (c).

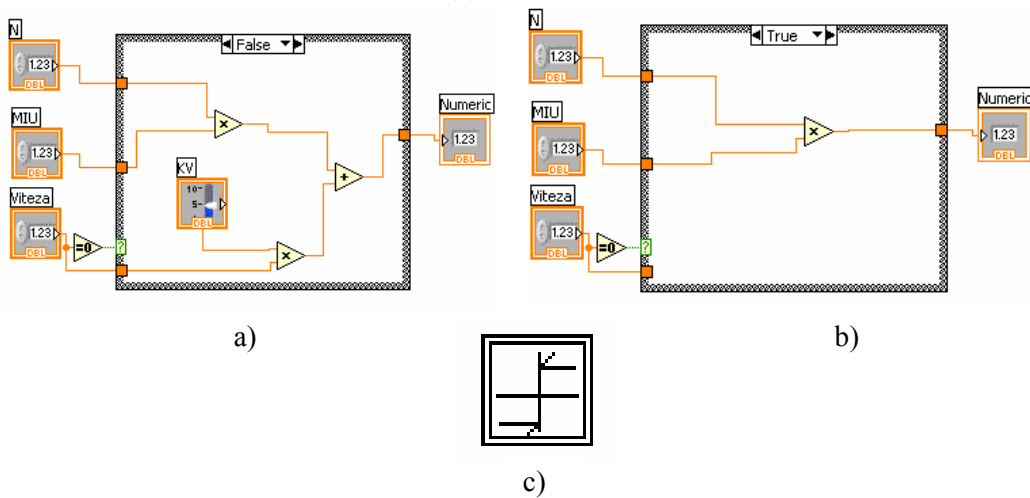


Fig. 8.94 Instrumentație virtuală pentru modelul frecării

Un ajutor substanțial în construcția unui instrument virtual îl reprezintă și *formula nod* care permite introducerea textuală a relațiilor de calcul. În figura 8.95 se exemplifică această posibilitate pentru modelul Armstrong (1994) al forței de frecare. Se remarcă multitudinea parametrilor de intrare care permit calculul, într-un spațiu restrâns utilizat, a forței de frecare  $F_c$ , a forței statice de frecare  $F_s$  și respectiv a forței de frecare  $F_f$ .

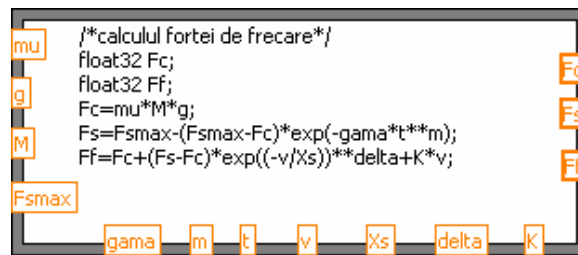


Fig. 8.95 Calculul forței de frecare prin formula nod

Utilizarea facilităților oferite de mediul de programare LabVIEW permite apelarea la variabile alfa-numerice și controale adecvate pentru introducerea constantelor empirice, a materialelor care formează cupla de frecare etc. Se ilustrează acest lucru în figura 8.96 prin diagrama care permite selecția modelului de calcul și a coeficientului de frecare din cupla cinematică.



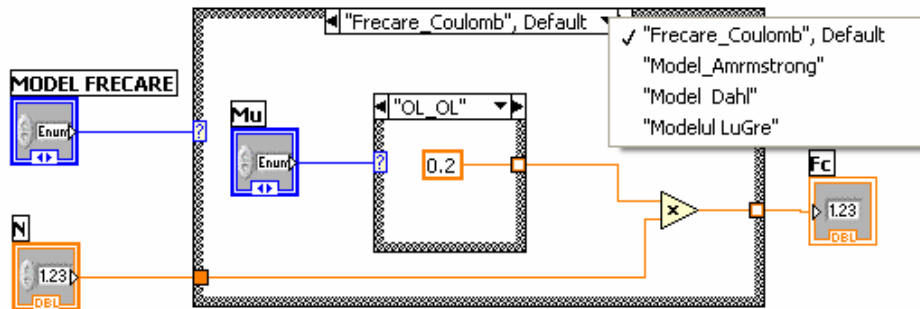


Fig. 8.96 Instrumentație virtuală în simularea frecării

### 8.4.3. Simularea operației de polizare robotizată

#### 8.4.3.1. Introducere

Operațiile de șlefuire, polizare sunt de neevitat adeseori în construcția de mașini. Aceste operații vin să finalizeze sau să pregătească o altă operație tehnologică.

În mod manual aceste operații se realizează fie prin purtarea unei scule adecvate de către operatorul uman, fie pe mașini specializate și dotate cu sculele necesare. Prin condițiile grele pe care le generează – praf, zgomot, vibrații etc.- s-a urmărit tot timpul o mecanizare, automatizare a acestei activități.

Soluția de flexibilitate maximă cu rezultatele cele mai bune le oferă robotizarea operației. Aplicația comportă una din două variante utilizate în general. Robotul fie va purta piesa de prelucrat în fața sculei care este fixă, fie scula în raport cu piesa de prelucrat care este fixată în dispozitive speciale.

Asigurarea succesului operației de polizare / șlefuire presupune o analiză a factorilor care sunt angrenați în activitate: geometria bavurilor - dimensiunea bavurilor poate varia nu numai în cadrul unui lot de piese, ci și pe suprafața aceleiași piese; amplasarea bavurilor este variabilă pe suprafața piesei; caracteristici mecanice diferite pentru o piesă (materiale neomogene, incluziuni, defecte locale) ca și pentru un lot de piese (variații de compoziție, tratamente termice diferite, viteze de turnare diferite); dimensiuni geometrice diferite chiar pentru un lot de piese identice (generate de tehnologia de fabricație, de uzura sculelor); profunzimea și dispunerea incluziunilor sau a defectelor de suprafață ca și rugozitatea, pot fi variabile [8.11], [8.12].

Introducerea tehnologiei robotizate în acest domeniu implică o analiză dinamică a comportării robot industrial – mediu de lucru (susținută de o simulare adecvată) și un studiu experimental care să definitiveze ipotezele de lucru inițial admise.

#### 8.4.3.2. Modelarea și simularea spațiului de lucru

Piese de prelucrat – care constituie mediul de lucru pentru cazul abordat – au forme diverse, cu muchii, bavuri, etc., rezultate din turnare, sudare, matrițare, etc. Prelucrarea se realizează ca și la operația manuală, prin contactul sculei de prelucrat – cordon de sudură, pe baza unui program de lucru. Traectoria reală a unui astfel de cordon de prelucrat (figura 8.97), se poate modela ca o succesiune de denivelări cu profile matematice cunoscute.

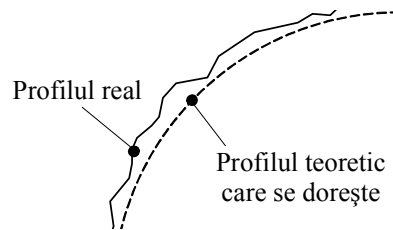


Fig. 8.97 Profilul real și teoretic

În figura 8.98 se prezintă un profil dreptunghiular care poate să apară în raport cu profilul teoretic dorit.

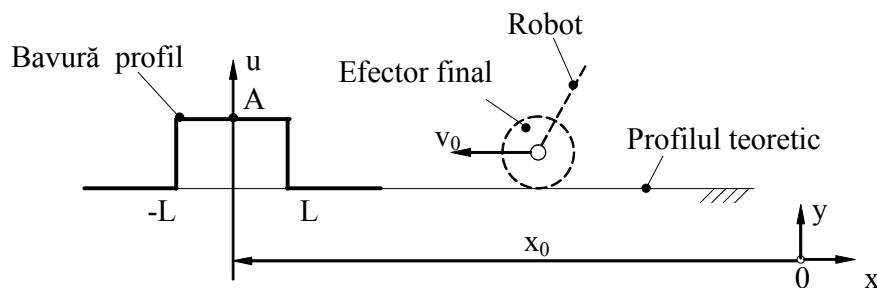


Fig. 8.98 Profilul dreptunghiular

În mod generic se consideră că scula de lucru este deplasată tangențial de robotul industrial cu viteza  $V_0$ . Față de un sistem de axe  $xOy$ , profilul simulat este poziționat prin cota  $x_0$ , are deschiderea  $[-L, L]$  și amplitudinea  $A$ . Introducând și variabila timp  $t$ , ecuațiile care descriu profilul sunt:

$$u = \begin{cases} 0 & , t < (x_0 - L)/v_0 \\ A & , \frac{x_0 - L}{v_0} \leq t \leq \frac{x_0 + L}{v_0} \\ 0 & , t > (x_0 + L)/v_0 \end{cases} \quad (8.185)$$

Modelul propus poate fi implementat în mediul de lucru MATLAB/Simulink. În mod asemănător au fost realizate blocurile modelelor profilelor unitare și au fost incluse într-o bibliotecă de lucru necesară simulării (fig.8.99) [8.11].

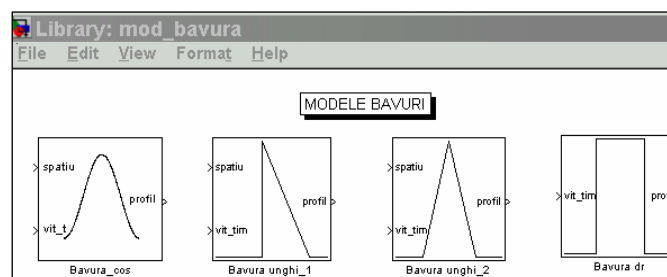


Fig. 8.99 Bibliotecă de profile în mediul Simulink / Matlab

Pe baza profilelor unitare anterioare, se poate genera un profil general (mai complex) ca o sumă de profile (fig.8.100).

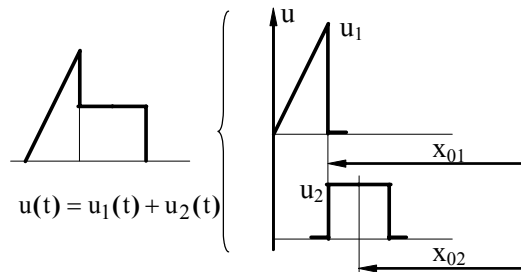


Fig. 8.100 Profil generat prin însumarea a două profile standard

Schema bloc, pentru generarea unui profil generalizat, pe baza bibliotecii de modele amintite, este prezentată în figura 8.101.

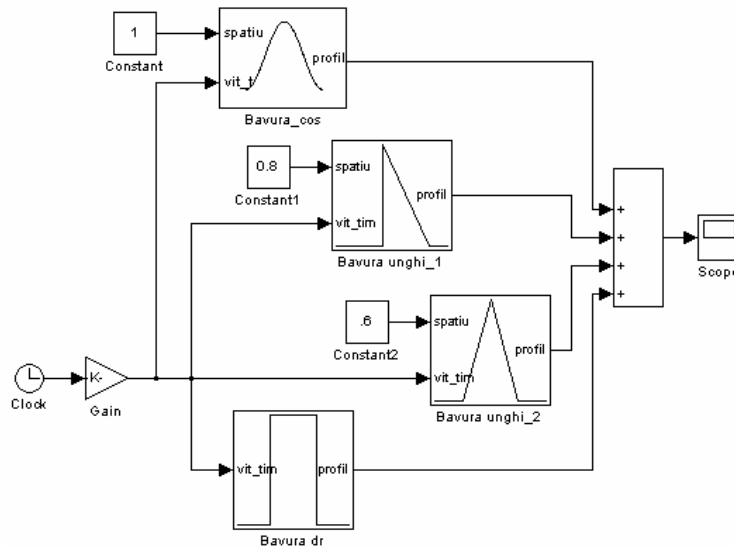


Fig. 8.101 Generarea unui profil complex prin profile unitare standard

### 8.4.3.3. Modelarea efortului final

Soluția constructivă de fixare a efortului final la dispozitivul de ghidare se alege de o astfel de manieră încât să limiteze transmiterea vibrațiilor. Frecvent se utilizează elemente elastice metalice lamelare dispuse spațial simetric, arcuri elicoidale cilindrice de compresiune sau elemente elastice din polimeri. Acestea intră în componența unor dispozitive compliante, numite de unii autori, “port-scule suplă”, sau “port-scule elastice”.

În figura 8.102 se prezintă schița principală a unor efortori finali pentru polizare / șlefuire și modul de echivalare dinamică [8.19]. Acesta este reprezentat de masa inerțială “*m*” – definită ca suma maselor reprezentate de efortorul final și glisieră, coeficientul de amortizare vâscoasă din sistem “*c*”, și constanta elastică “*k*”. Sistemul are un singur grad de libertate definit de coordonata generalizată “*y*”. O atenție

deosebită se impune în adoptarea unei soluții optime pentru eliminarea influenței greutății efectorului final asupra dispozitivului de complianță. Constructiv, fie se adoptă o poziție adecvată a efectorului, fie se recurge la soluții de echilibrare a greutății acestuia.

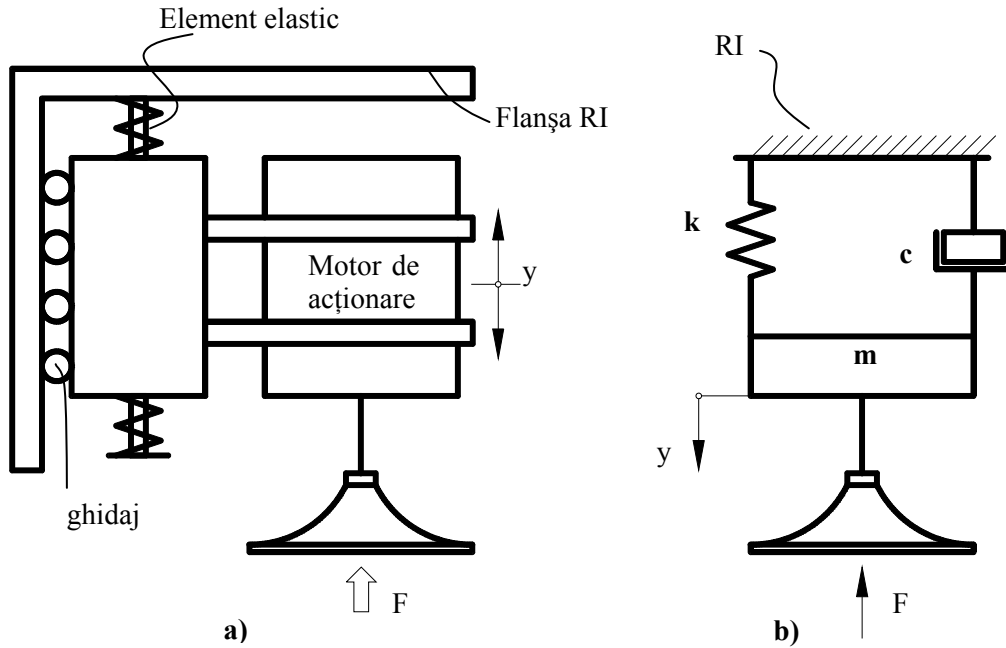


Fig. 8.102 Efectorul final și modelul echivalent

Dacă se ia în considerare și elasticitatea sistemului mecanic al robotului industrial modelul ansamblului dispozitiv de ghidare – efector final este cel prezentat în figura 8.103 [8.11].

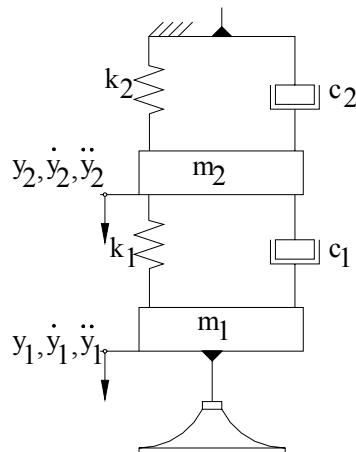


Fig. 8.103 Robotul industrial, efectorul și modelul echivalent

Utilizând notațiile din figura 8.102, ecuația care descrie dinamica efectorului final în faza de manipulare grosieră, are forma:

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = -m \cdot a(t) \tag{8.186}$$

Se prezintă în figura 8.104 rezultatele simulării pentru datele:  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 5000 \text{ N/m}$ ,  $c_1 = 5 \text{ Ns/m}$  și o accelerație  $a = 2 \text{ m/s}^2$ . Un coeficient de amortizare redus  $c_1 = 5 \text{ Ns/m}$ , conduce la vibrații accentuate atât pe perioada de frânare, cât și pe perioada imediat următoare. Aceasta ar înrăutăți procesul de lucru, ar fi sursă de zgomot și solicitări suplimentare ale structurii robotului. O creștere a valorii coeficientului de amortizare vâscoasă (valoarea  $c_2$ ) reduce acest efect iar timpul de liniștire intră în limitele admisibile.

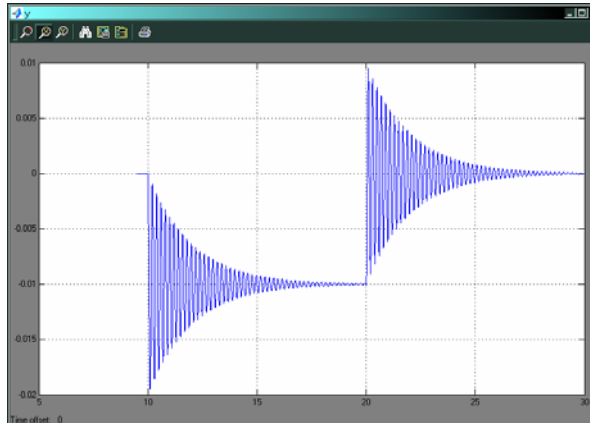


Fig. 8.104 Comportarea sistemului analizat în faza de manipulare grosieră

**8.4.3.4. Modelul interacțiunii efector – mediul de lucru**

Analiza dinamică, a interacțiunii efector final – piesa de prelucrat în operații de debavurare / șlefuire, trebuie să considere interacțiunea calitativă sculă – piesă (fig. 8.105).

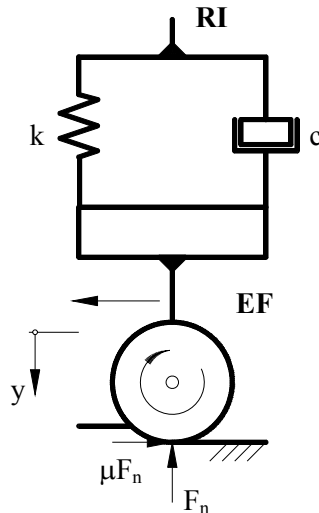


Fig. 8.105 Interacțiunea cu mediul de lucru a sculei de debavurare

Procesul de debavurare / șlefuire se poate aborda luând în considerare modelele prezentate anterior la care se adugă modelul interacțiunii dintre sculă și bavură, pe baza formei bavurii, a dimensiunii sculei de prelucrat, a materialului etc.

Forța de prelucrare depinde de forța de apăsare, de adâncimea de prelucrare, grosimea așchii, etc. Formulele de calcul ale forței de prelucrare furnizate de literatura de specialitate sunt în general empirice, depinzând în mare măsură de valori determinate experimental.

Pentru prelucrarea sticlei, cu o sculă pe bază de diamant, este necesară o forță de prelucrare  $F$ :

$$F = \lambda K_C A \quad (8.187)$$

unde:  $\lambda$  – este un coeficient experimental subunitar;  $K_C$  – este presiunea specifică de prelucrat;  $A$  – este suprafața instantanee de prelucrat.

În alte abordări, forțele de interacțiune sculă – material sunt proporționale cu aria transversală de material eliminat:

$$A = \frac{c_1 \cdot \mu \cdot R \cdot \omega \cdot F_N}{v_t} \quad (8.188)$$

unde:  $c_1$  – coeficient de material;  $\mu$  – este coeficientul de frecare piesă – sculă ;  $R$  – este raza discului sculă ;  $\omega$  – viteza unghiulară a sculei;  $F_N$  – forța normală ;  $v_t$  - viteza tangențială de deplasare.

În [8.3] forțele de interacțiune dintre sculă și piesă se admit sub forma :

- Reacțiunea  $F$  care se dezvoltă asupra sculei se descompune într-o componentă normală și una tangențială:

$$F_t = \mu F_n \quad (8.189)$$

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi$$

- Forța normală se consideră dependentă de parametrii de material îndepărtat:

$$F_n = C \cdot Z \quad (8.190)$$

unde :  $C$  este un coeficient de material ;  $Z$  – este un coeficient care caracterizează materialul îndepărtat .

#### ***8.4.4. Simularea funcțională a cuplelor cinematice conducătoare din structura roboților industriali***

##### **8.4.4.1. Introducere**

Sistemul mecanic al roboților industriali, în abordările clasice, a fost considerat ca o structură nedeformabilă, realizată din elemente ideale-rigide. Această structură este în realitate deformabilă sub acțiunea forțelor exterioare tehnologice, a forțelor de inerție și a celor masice, fapt ce nu poate fi neglijat mai ales în cazul roboților ușori și rapizi.

Complianța structurală a sistemului mecanic, prin deformațiile și vibrațiile

generate, afectează semnificativ precizia robotului. În consecință, se impune compensarea acestora, fapt realizabil numai prin determinarea și luarea lor în considerare la modelarea, calculul, comanda și măsurarea performanțelor roboților.

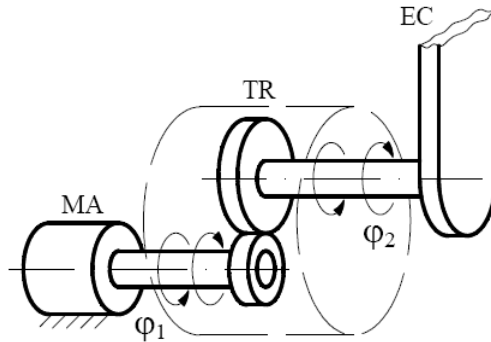
Elasticitatea structurală a robotului se manifestă la nivelul fiecărei componente a sistemului mecanic al acestuia: batiu, elemente și cuple cinematice conducătoare. Efectele dinamice care influențează sensibil funcționarea robotului sunt sesizate în principal la nivelul elementelor și al cuplelor cinematice conducătoare.

Cupla cinematică conducătoare, în majoritatea abordărilor a fost considerată perfectă, sau mai concret, elementele componente ale sistemului de acționare au fost considerate rigide și deformările acestora inexistente. În cazul sistemelor rapide, vitezele instantanee ale diverselor componente cuplate mecanic sunt diferite și chiar de semne contrare.

**8.4.4.2. Simularea cuplei cinematice conducătoare [8.13]**

Sistemul elastic torsional este alcătuit din rotorul motorului, elementele transmisiei intercalate, cuplaje și senzori de cuplu. Elementele dispozitivului de ghidare formează un ansamblu complex de mase și elemente elastice distribuite.

Schema cinematică a unei cuple cinematice conducătoare pentru un robot industrial este prezentată în figura 8.106.



**Fig. 8.106 Cuplă cinematică conducătoare**

În numeroase cazuri este valabilă considerarea perfect rigidă a sistemului analizat. Dacă sistemul de acționare se compune din motorul “MA” – pe care îl considerăm pentru simplificare ca fiind un motor de curent continuu – și o transmisie reductoare cu raportul de transmitere  $N$ , dinamica sistemului rigid este descrisă de ecuațiile:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{N} \tag{8.191}$$

$$M_{red,r} = \frac{M_{red}}{\eta_R \cdot N} \tag{8.192}$$

$$U = Ri + K_E \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + L \cdot \frac{di}{dt} \tag{8.193}$$

$$J_{red,r} \cdot \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = K_m \cdot i - M_{red,r} - C \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} \quad (8.194)$$

unde:  $M_{red,r}$  reprezintă momentul redus la rotorul motorului electric;  $J_{red,r}$  este momentul de inerție redus la rotorul motorului electric;  $\eta_R$  este randamentul transmisiei,  $U$  este tensiunea pe indus;  $R$ ,  $L$ ,  $I$  sunt rezistența, inductivitatea și curentul motorului;  $K_m$  și  $K_E$  sunt constantele motorului, iar  $C$  este coeficientul frecărilor vâscoase.

Un alt model al cuplei cinematice conducătoare constă din solide deformabile reprezentând motoarele, reductoarele și transmisiile. Acestea se asimilează cu un singur element deformabil și o masă inerțială (fig.8.107).

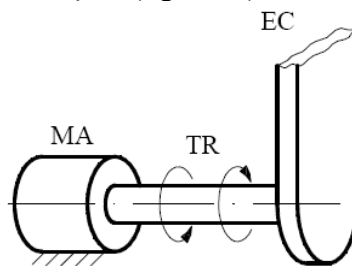


Fig. 8.107 Cuplă cinematică conducătoare cu un singur element conducător

Ecuatiile care descriu dinamica acestui model sunt:

$$J \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = M_m - M_i \quad (8.195)$$

$$I \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = M_i - M_r \quad (8.196)$$

$$M_i = K \cdot (\varphi_m - \varphi_r) + C \cdot (\omega_m - \omega_r) \quad (8.197)$$

$$\frac{d\varphi_m}{dt} = \omega_m \quad (8.198)$$

$$\frac{d\varphi_r}{dt} = \omega_r \quad (8.199)$$

unde:  $J$  este momentul de inerție redus la rotor;  $I$  este momentul de inerție al elementului mobil în raport cu axa de rotație;  $K$  și  $C$  sunt constanta de elasticitate și respectiv de amortizare echivalente.

Modelul Matlab / Simulink al cuplei cinematice conducătoare modelate ca sistem elastic cu o singură masă inerțială - realizat pe baza sistemului de ecuații (8.195)-(8.199) este prezentat în figura 8.108. Blocul subsistem aferent este prezentat în figura 8.109. Răspunsul sistemului de acționare la un semnal de intrare de tip treaptă



este ilustrat prin deformația elementului elastic echivalent și respectiv evoluția oscilațiilor torsionale (fig.8.110)

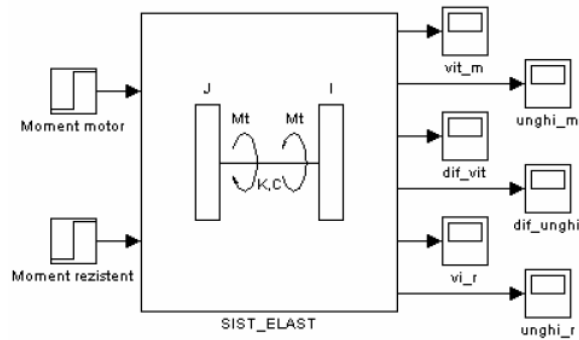


Fig. 8.108 Modelul Simulink al cuplei cinematice conducătoare

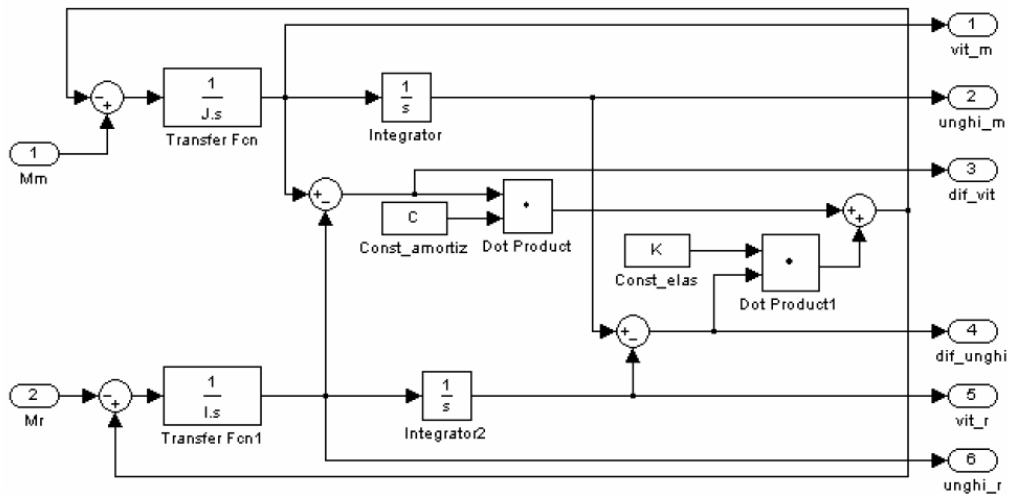


Fig. 8.109 Blocul subsistem al cuplei cinematice conducătoare

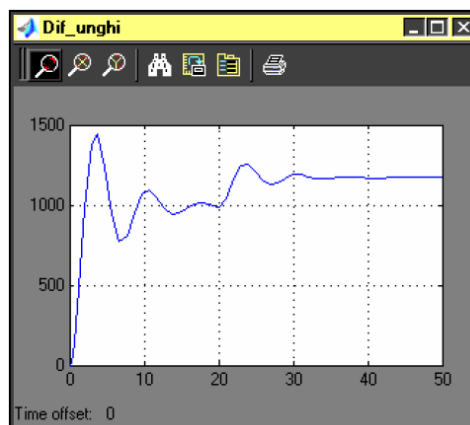


Fig. 8.110 Răspunsul sistemului la un semnal treaptă

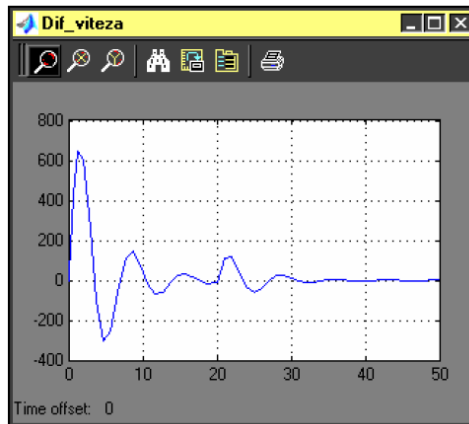


Fig. 8.111 Oscilațiile elementului de ieșire

Una din metodele de modelare poate apela la divizarea sistemului analizat în subsisteme componente, fiecăruia corespunzându-i un submodel. Fiecare dintre aceste submodele are asociată o pictogramă care o caracterizează și o casetă de dialog pentru introducerea datelor aferente. Pe baza principiilor de construcție a modelelor Matlab / Simulink s-a realizat o bibliotecă de modele numită MODEL\_RI, care permite simularea dinamicii cuplurilor cinematice conducătoare (fig. 8.112)[8.13].

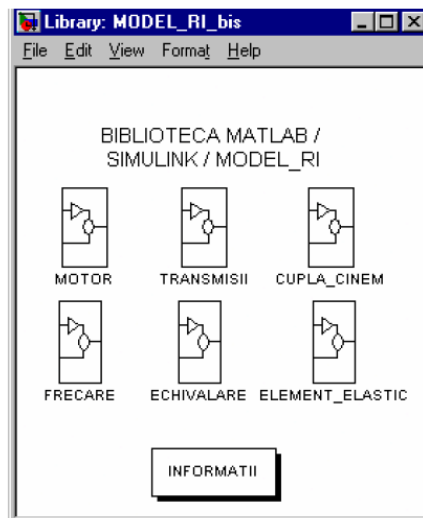


Fig. 8.112 Biblioteca MODEL\_RI

Aceasta conține o serie de pictograme care formează biblioteca standard. Fiecare subsistem bloc – *Motor*, *Transmisii*, *Cupla\_Cinem*, *Frecare*, *Echivalare*, *Element\_Elastic* – asigură deschiderea unei noi ferestre cu bibliotecii proprii de modele accesibile conform principiilor de lucru în Simulink. În figura 8.113 se prezintă o fereastră de lucru pentru subsistemul “Transmisii” din biblioteca standard. Fiecare subsistem bloc poate fi apelat și utilizat în construcția modelului destinat simulării.

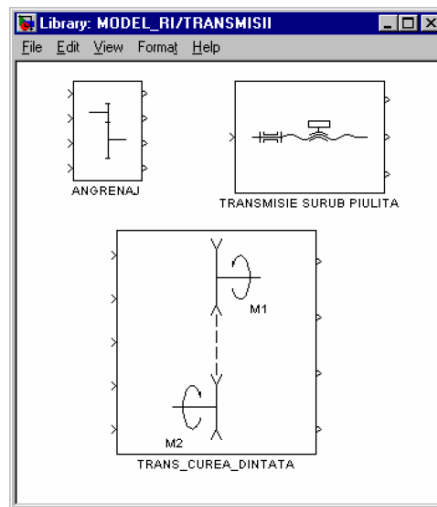


Fig. 8.113 Subsistemul “Transmisii” din biblioteca MODEL\_RI

Principiul de lucru este ilustrat în figura 8.114 unde se prezintă modelul pentru simularea sistemului de acționare al unui modul de translație. Schema a fost realizată pe baza subsistemelor bloc din biblioteca standard Simulink și ale subsistemelor din biblioteca MODEL\_RI.

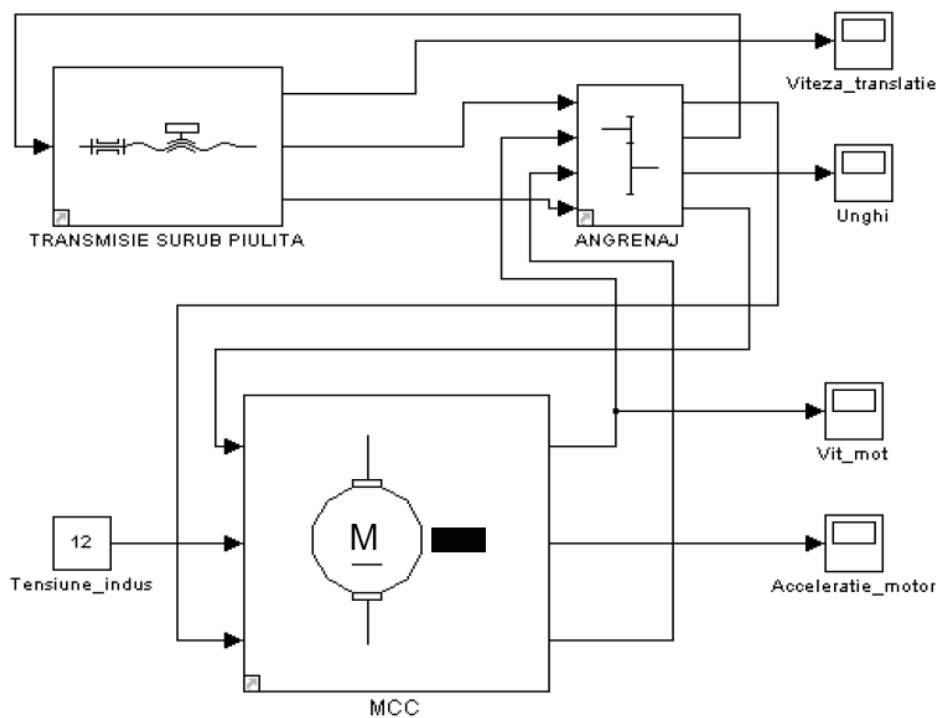


Fig. 8.114 Modelul Simulink pentru simularea unui modul de translație

### 8.4.5. Simularea fenomenului de levitație magnetică

Proiectarea optimă a sistemului de levitație, inclusiv subsistemul pentru control, necesită un “echilibru” între partea de modelare / simulare și partea experimentală [8.14], [8.15].

Pe baza ecuațiilor care constituie modelul matematic al sistemului (§ 8.3.3.6.5) se poate realiza în mediul Matlab / Simulink simularea funcționării sistemului. În figura 8.115 se prezintă schema bloc de simulare. Blocul “Levitație” a fost realizat în scopul introducerii acestuia într-o bibliotecă de lucru. În figura 8.116 se prezintă modelul conținut prin blocul realizat iar rezultatele simulării, poziție și viteză, sunt prezentate în figura 8.117

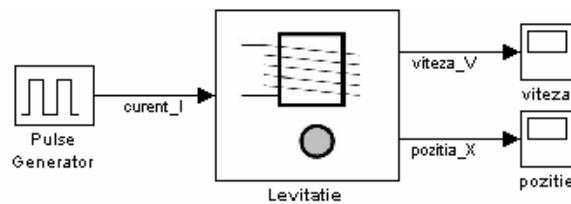


Fig. 8.115 Simularea sistemului de levitație

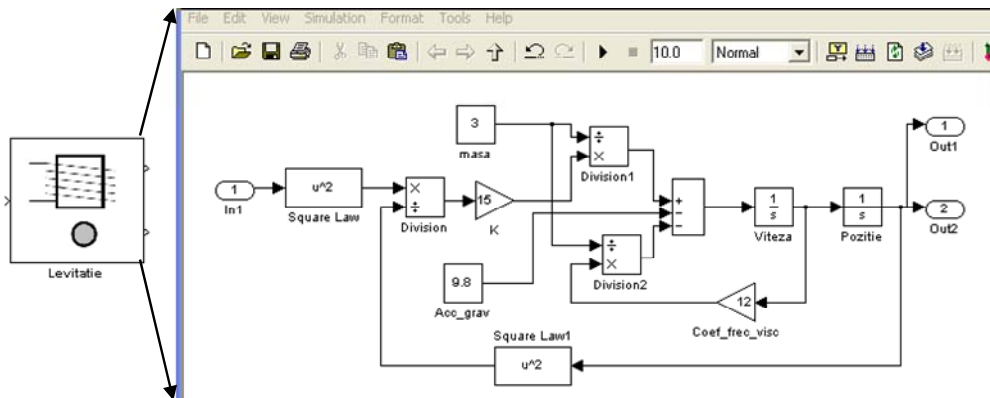


Fig. 8.116 Masca și blocul realizat

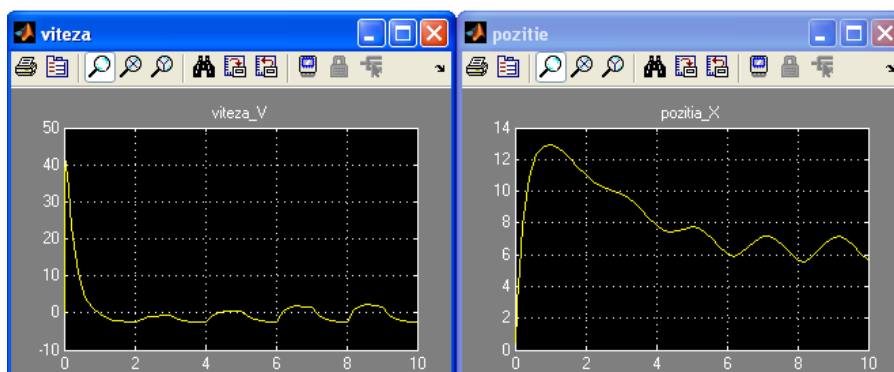


Fig. 8.117 Rezultatele simulării

În cadrul laboratorului de “Senzori și Actuatoare” al Departamentului de Mecatronică a fost realizat un sistem de levitație magnetică (fig. 8.118)[8.7]. O dezvoltare a metodelor de control a necesitat luarea în considerare a mai multor variante compatibile cu mediul Matlab / Simulink. S-a apelat în final, datorită multiplelor facilități, pentru mediul dSPACE. Pentru această ultimă variantă se prezintă schema structurală propusă (fig.8.119)

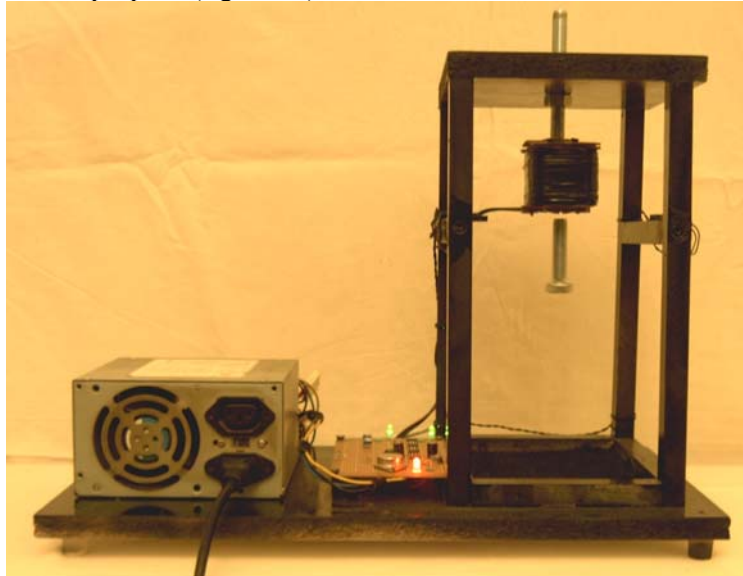


Fig. 8.118 Modelul experimental

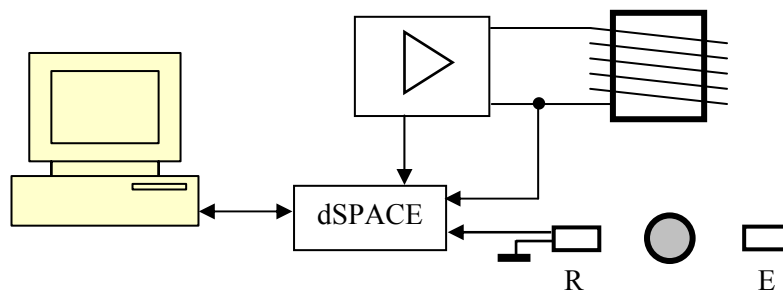


Fig. 8.119 Variantă pentru controlul sistemului de levitație cu echipament dSPACE

#### 8.4.6. Simulare multiplă a unui sistem inerțial

Un sistem de amortizare inerțial este prezentat în figura 8.120 [8.34]. Se dorește construcția modelului matematic și modelarea în mediul Matlab prin folosirea mai multor facilități.

Mărimea de intrare în sistem este reprezentată de forța creată de elementul elastic “1” iar mărimea de ieșire este reprezentată de deplasarea “x” a barei “2”. Pentru simularea efectivă se consideră exemplul numeric :  $L_1 = 0.5 \text{ m}$ ;  $L_2 = 1 \text{ m}$ ;  $M = 5 \text{ kg}$ ;  $C = 5 \text{ N/(m/s)}$ ;  $K = 4 \text{ N/m}$ ;  $F = 5 \text{ N}$ .

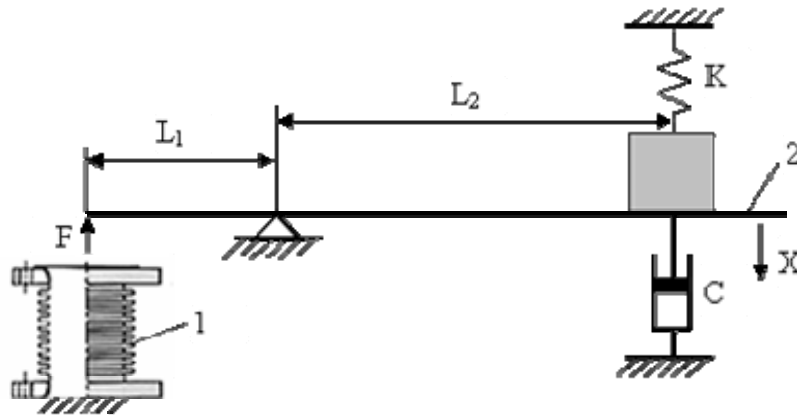


Fig. 8.120 Sistem inerțial

Ecuția care descrie funcționarea sistemului inerțial este:

$$M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + C \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = -\frac{L_1}{L_2} \cdot F \quad (8.200)$$

#### 8.4.6.1. Simularea sistemului prin utilizarea funcției de transfer

Utilizând teoria sistemelor (transformata Laplace aplicată ecuației diferențiale de ordinul 2 (8.200)) se determină funcția de transfer a sistemului:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{-L_1/L_2}{M \cdot s^2 + C \cdot s + K} \quad (8.201)$$

Fișierul \*.m, care permite determinarea răspunsului sistemului la un semnal treaptă unitar, este prezentat în figura 8.121 iar răspunsul sistemului în figura 8.122.

```

File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons] [Ba...] [ ]
1 - M=5;
2 - l1=0.5;
3 - l2=1.5;
4 - C=5;
5 - K=4;
6 - num=[-l1/l2];
7 - den=[M C K];
8 - step
script Ln 1 Col 1 OVR

```

Fig. 8.121 Fișierul \*.m pentru determinarea răspunsului sistemului

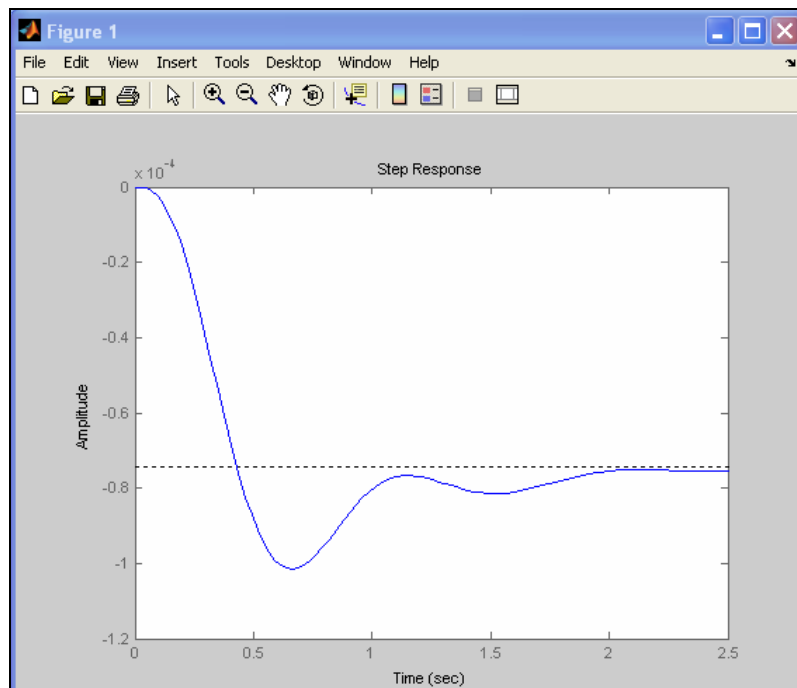


Fig. 8.122 Răspunsul sistemului la un semnal treaptă unitar

**8.4.6.2. Simularea sistemului (fig.8.120) pe baza mediului Matlab / Simulink**

Utilizând facilitățile mediului de lucru Matlab / Simulink se poate construi schema de simulare din figura 8.123. Rezultatul simulării, în condiții identice cu cele din cazul anterior, este prezentat în figura 8.123.

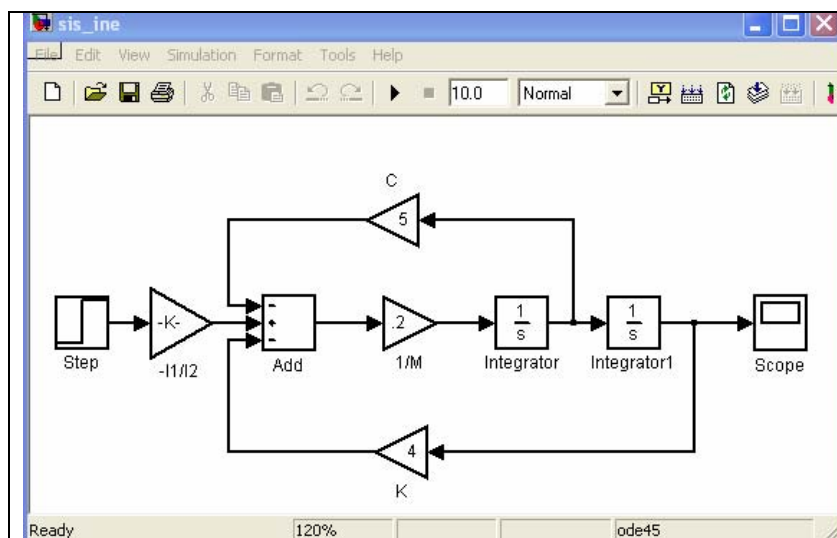


Fig. 8.123 Schema de simulare în mediul Matlab / Simulink

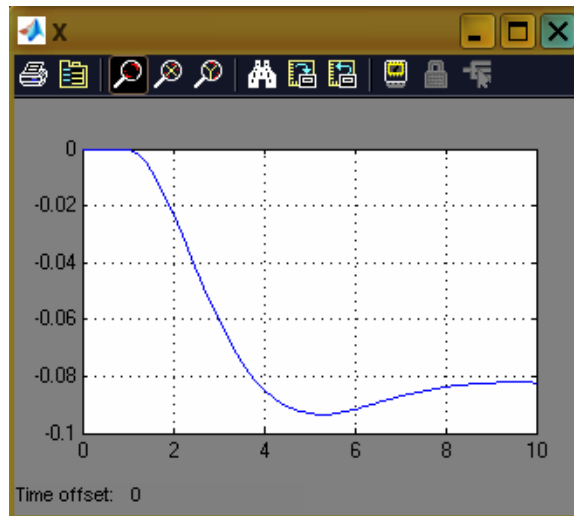


Fig. 8.124 Rezultatul simulării în Matlab / Simulink

#### 8.4.6.3. Modelul sistemului de stare

Modelul de stare se determină din ecuația (8.200) prin stabilirea variabilelor de stare:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (8.202)$$

Acestea permit transformarea ecuației (8.202) în sistemul:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{K}{M} \cdot x_1 - \frac{C}{M} \cdot x_2 - \frac{L_1/L_2}{M} \cdot F \end{aligned} \quad (8.203)$$

sau sub formă matriceală:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L_1/L_2}{M} \end{bmatrix} \cdot [F] \\ [y] &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] \cdot [F] \end{aligned} \quad (8.204)$$

Transcrierea modelului matematic în mediul de lucru Matlab / Simulink este prezentată în figura 8.125 iar caseta de dialog în figura 8.126. Rezultatul simulării este



același ca cel prezentat în figurile anterioare (fig.8.122, fig.8.124).

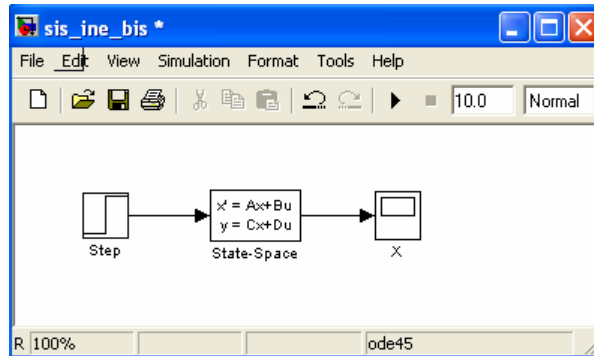


Fig. 8.125 Simularea pe baza modelului de stare în mediul Matlab / Simulink

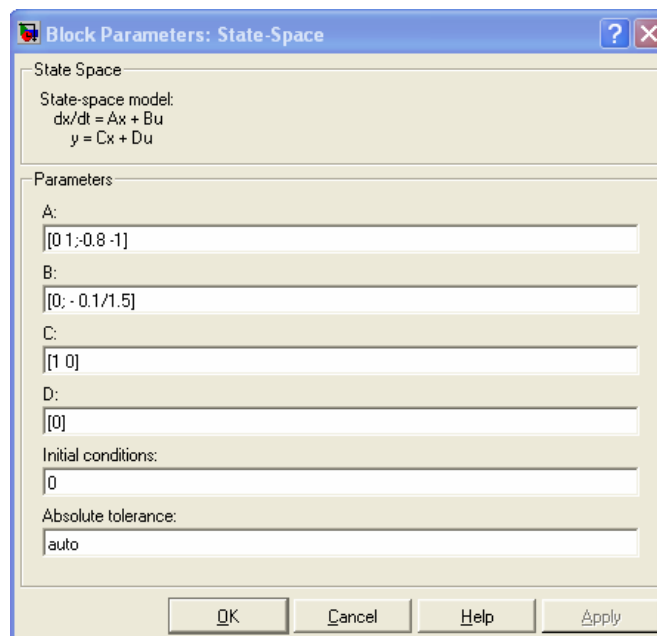


Fig. 8.126 Caseta de dialog pentru introducerea parametrilor

#### 8.4.7. Simularea unui sistem inerțial format din două mase

Sistemul inerțial format din două mase legate prin elemente elastice este extrem de răspândit în lumea sistemelor tehnice reale (fig.8.127). Două mase  $m_1$  și  $m_2$  se pot deplasa, fără frecare, pe verticală fiind legate prin elementele elastice cu rigiditățile  $K_1$  și  $K_2$ . Parametrii geometrici care descriu poziția celor două mase sunt  $x_1$  și respectiv  $x_3$ . Sistemul are două grade de libertate.

Modelul matematic al sistemului se poate obține prin aplicarea legilor lui Newton, a formalismului Lagrange sau a formalismului bond-graph.

Prin aplicarea formalismului Lagrange și în concordanță cu notațiile din figura 8.127 se obține modelul matematic format din ecuațiile:

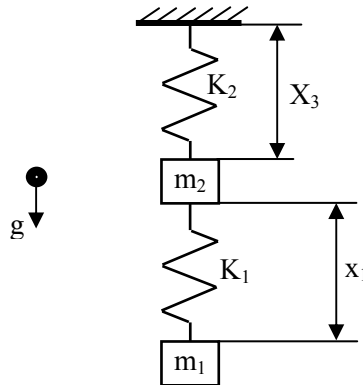


Fig. 8.127 Sistem inerțial cu două mase

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_1 \cdot \frac{d^2 x_3}{dt^2} + k_1 x_1 = m_1 g \quad (8.205)$$

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (m_1 + m_2) \cdot \frac{d^2 x_3}{dt^2} + k_2 x_3 = (m_1 + m_2) g$$

Aplicând metodologia de obținerea a sistemului de stare, ecuațiile anterioare se transformă în modelul de stare:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot k_1 \cdot x_1 + \frac{1}{m_2} \cdot k_2 \cdot x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = \frac{1}{m_2} \cdot k_1 \cdot x_1 - \frac{1}{m_2} \cdot k_2 \cdot x_3 + g \end{cases} \quad (8.206)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot K_1 & 0 & \frac{K_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_1}{m_2} & 0 & -\frac{K_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (8.207)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

Simularea sistemului se poate realiza în conformitate cu cele prezentate anterior prin utilizarea sistemului (8.207) și a mediului Matlab/Simulink.

Modelarea sistemului se poate realiza și prin aplicarea formalismul bond-graph și utilizarea mediului de lucru 20-Sim (fig.8.128).

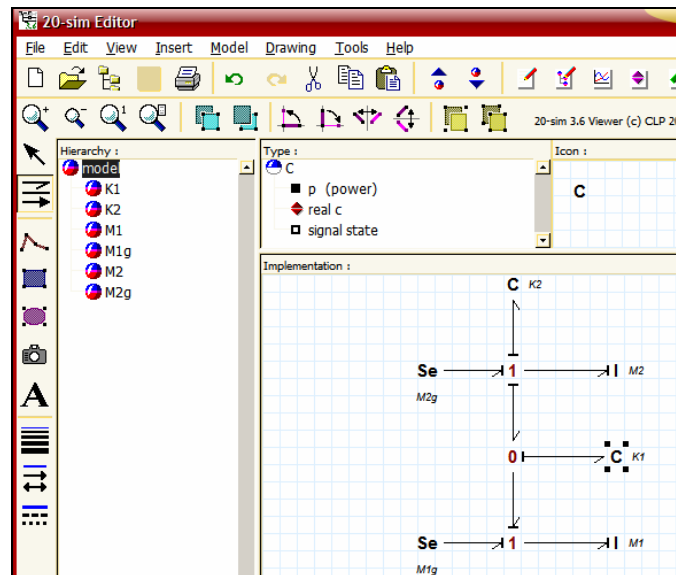


Fig. 8.128 Simularea sistemului inerțial în bond-graph

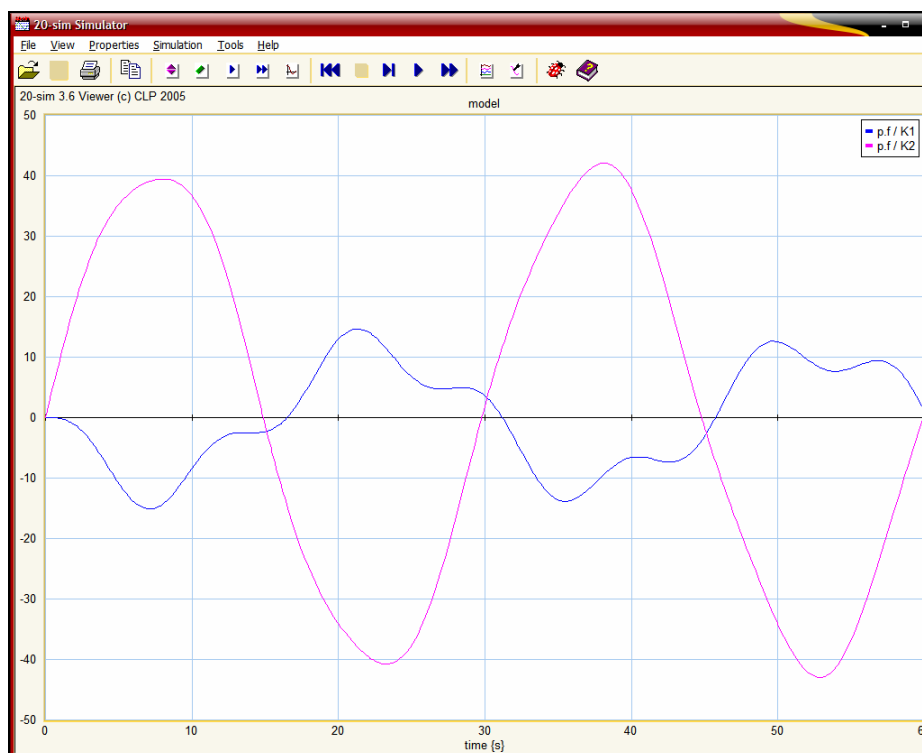


Fig. 8.129 Rezultatele simulării sistemului inerțial în mediul 20\_Sim

### 8.4.8. Simularea în mediul Dymola

Proiectarea orientată obiect, prin metodologie și generalitate, este o metodă cu largă aplicabilitate pentru domeniul mecatronic. Mediul de lucru Dymola oferă facilități multiple de modelare a sistemelor mecatronice.

În figura 8.130 se prezintă modelul realizat în mediul Dymola pentru un sistem de acționare compus din:

- m.c.c (parametrii electrici  $U$ ,  $R$ ,  $L$  și parametru mecanic  $J_1$ );
- transmisie mecanică reductoare cu roți dințate (raport de transmitere  $i = 3$ );
- sarcină de lucru cu momentul de inerție  $J_2$ .

Între motorul de acționare și reductor se consideră introdus un senzor de cuplu care oferă informația despre cuplul dezvoltat.

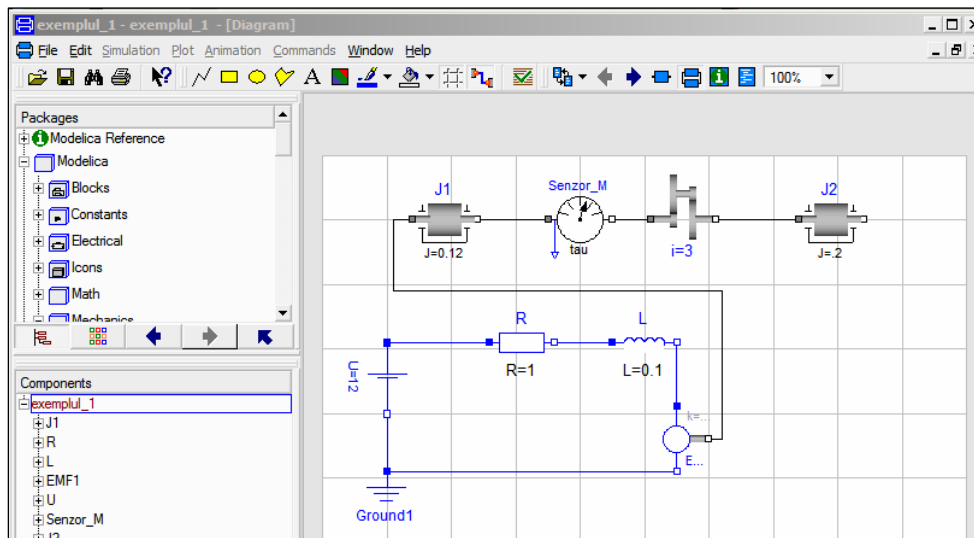


Fig. 8.130 Modelare și simulare în Dymola

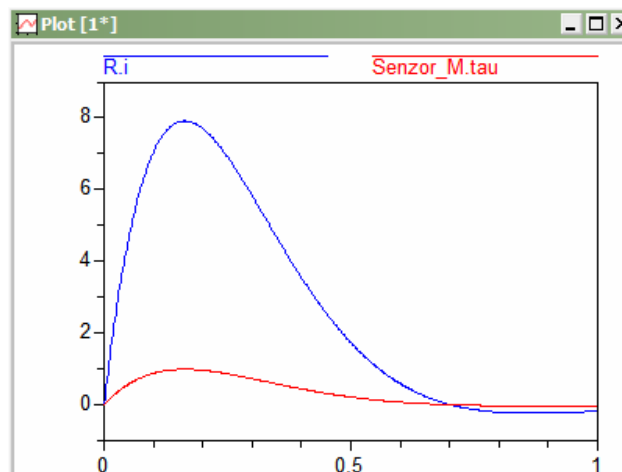


Fig. 8.131 Simularea în Dymola a funcționării sistemului prezentat

**8.4.9. Modelare, simulare, achiziție de date și identificare de parametri**

În §8.3.3.3 a fost prezentat o variantă a modelului matematic pentru un pendul fizic. S-a menționat atunci că nu este singura variantă de model având în vedere ipotezele admise. În [8.41] se prezintă un alt model în care nu se ia în considerare aspectul frecării:

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mgl \cos \varphi \tag{8.208}$$

unde: J – este momentul de inerție a elementului mobil față de axa de rotație ; M – este masa mobilă a sistemului ; l<sub>0</sub> – este poziția centrului de masă a sistemului față de axa de rotație ; φ – este unghiul de oscilație.

Un model matematic, mult mai apropiat de realitate, este descris de ecuația:

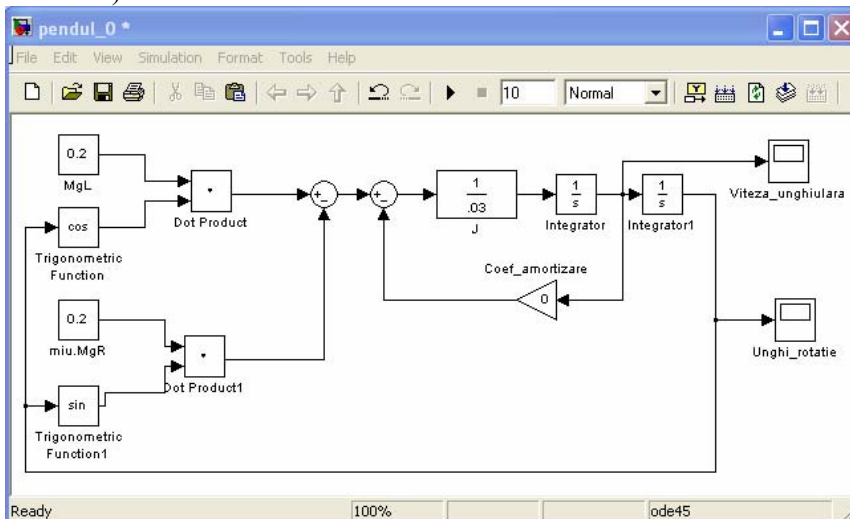
$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mgl_0 \cos \varphi - \mu MgR \sin \varphi - c \cdot \frac{d\varphi}{dt} \tag{8.209}$$

unde: μ – este coeficientul de frecare din cupla cinematică de rotație a sistemului; R – este raza de materializare a cuplei cinematice; c – este coeficientul frecărilor vâscoase din sistem.

Validarea, unui model s-au a altuia, presupune abordarea problemei de identificare a unor parametri a căror cunoaștere este redusă. Un astfel de parametru este și coeficientul frecărilor vâscoase din sistem.

Modelul descris de ecuația (8.209) poate fi implementat în mod simplu într-un mediu de simulare. Am apelat la mediul de simulare Matlab / Simulink (fig.8.132).

Modelul dezvoltat permite, prin modul de introducere a datelor, ilustrarea și a modelului 2 sau a unor variante ale modelului 3 (doar frecare uscată, frecare uscată și frecare vâscoasă).



**Fig. 8.132 Modelul Simulink pentru pendulul fizic**

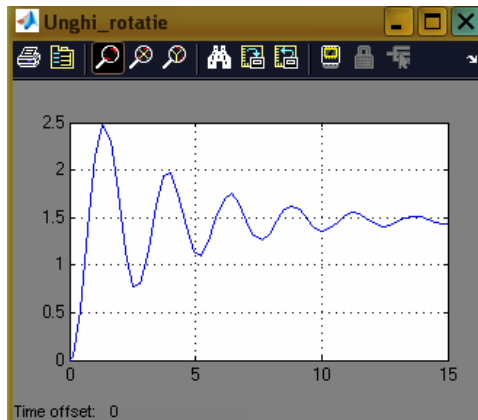


Fig. 8.133 Unghiul de rotație pentru frecare uscată și vâscoasă

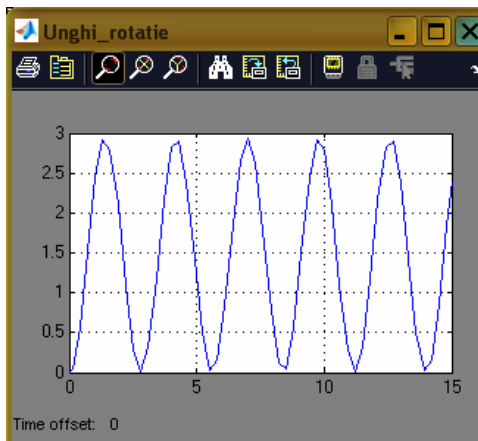


Fig. 8.134 Unghiul de rotație doar pentru frecare uscată

Rezultatele simulării confirmă necesitatea etapei de identificare a parametrilor având în vedere diferențele calitative și cantitative ale comportamentului real față de cel simulat. Sistemul real materializat și propus pentru studiu este prezentat în figura 8.135 (1 – sistem de calcul cu placă de achiziție; 2 – traductor de rotație rezistiv; 3 – pendul; 4 – sursă de semnal).

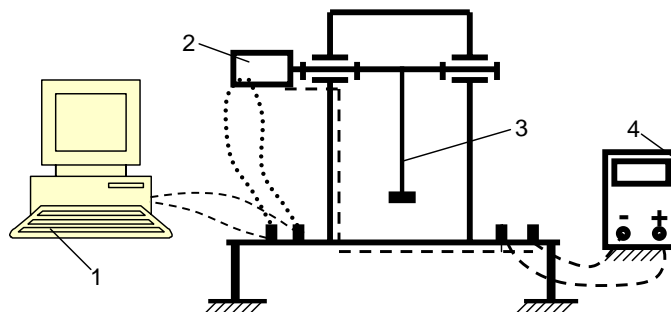


Fig. 8.135 Stand experimental pentru identificarea parametrilor

Parametrii geometrici și de masă ai pendulului și caracteristica statică a traductorului rezistiv de rotație au fost determinate prin procedeele clasice de măsurare.

Pentru achiziția semnalului, corespunzător unghiului de rotație, s-a apelat la mediul de lucru LabView. În figura 8.136 se prezintă semnalul înregistrat fără filtrare iar în figura 8.137 același semnal cu filtrare.

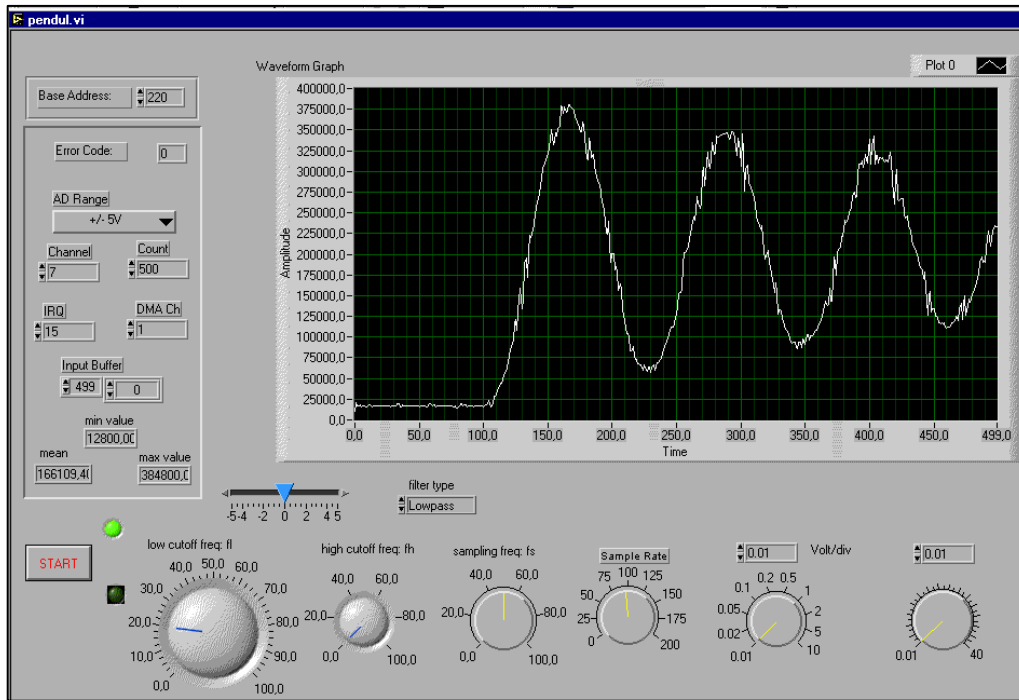


Fig. 8.136 Semnal achiziționat și filtrate necorespunzător

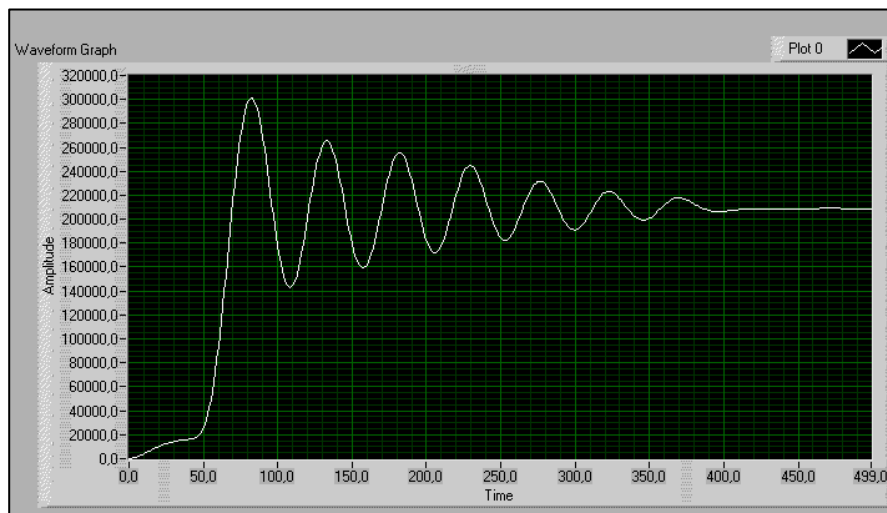


Fig. 8.137 Semnalul achiziționat și filtrat

Pe baza valorilor înregistrate (fig.8.138) și a principiilor de lucru pentru identificarea parametrilor dintr-un sistem mecanic s-a putut determina coeficientul

frecărilor vâscoase  $C = 0.089 \frac{Nms}{rad}$  [8.16].

Lister - [G:\LUCRU_ETAPA_3\INREGISTRARI\pen_1]					
File	Edit	Options	Help	70 %	
168037,062	180877,484	193534,000	205982,094	218149,406	229833,297
240890,375	251241,531	260745,812	269294,562	276846,281	283390,844
288891,937	293178,000	296128,500	297790,125	298194,625	297356,375
295327,437	292203,625	288072,875	282951,906	276891,500	269999,594
262385,781	254182,172	245532,625	236554,656	227360,906	218099,734
208925,094	199973,562	191367,141	183216,734	175645,766	168767,031
162654,422	157326,781	152827,937	149268,062	146705,172	145184,812
144760,187	145397,031	147023,656	149643,078	153283,781	157847,969
163176,031	169110,375	175513,234	182318,781	189439,172	196817,203
204422,594	212163,344	219905,094	227450,062	234626,750	241280,297
247264,297	252511,906	256981,734	260651,234	263481,469	265378,781
266296,031	266330,969	265566,969	263953,312	261473,891	258198,203
254196,234	249500,734	244170,469	238332,719	232110,969	225602,828
218913,609	212145,062	205390,531	198779,500	192453,953	186505,250
181001,781	176034,062	171701,375	168067,422	165159,062	162999,641
161618,437	161045,187	161280,422	162286,453	164058,766	166618,109
169903,016	173846,797	178410,969	183457,016	188816,234	194433,500
200288,750	206279,812	212265,297	218129,578	223792,219	229188,344
234235,719	238823,219	242867,641	246342,453	249191,047	251332,844
252731,141	253353,641	253179,844	252263,094	250678,234	248432,375
245529,375	242049,375	238088,312	233700,250	228939,797	223876,516
218594,422	213220,125	207870,156	202612,156	197530,062	192738,719
188313,562	184317,281	180828,281	177906,734	175580,516	173900,000
172938,562	172705,172	173155,672	174190,375	175747,531	177883,266

Fig. 8.138 Fragment din fișierul de date înregistrat

## 8.5. Concluzii

Prin informațiile prezentate s-a dorit scoaterea în evidență a complexității aspectelor legate de modelarea sistemelor mecatronice. În același timp au fost oferite detalii referitoare la medii de lucru actuale pentru simularea sistemelor mecatronice. În plus s-a evidențiat și necesitatea existenței etapei de experiment, identificare de parametri pentru validarea unui model.

## 8.6. Bibliografie

- [8.1]Andersson, J., Multiobjective optimization in Engineering Design, Linkoping Universitet (Sweden), 2001
- [8.2]Armstrong-Helouvry, B., ș.a., A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction, Automatics, vol.30, no.7, p.1083-1138, 1994
- [8.3]Asada, H., Goldfine, N., Optimal Compliance Design for Grinding Robot Tool Holders, IEEE Conf. on Robotics and Automation, St. Louis, 1985
- [8.4]Bishop H.: The Mechatronics Handbook, CRC Press, London-New York-Washington, 2002
- [8.5]Breedveld, P., Bond Graphs, Encyclopedia of Life Support Systems (topic 6.43.7), Twentee (Holand)
- [8.6]Broenink, J.F., Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs,



- Univ. of Twente, Dep. EE, Enschede, Olanda, 1999
- [8.7]Dobrea, C., Sustența electromagnetică, Proiect de diplomă –specializarea Mecatronică, Timișoara, 2006
- [8.8]Dolga, V., Dolga, L., Modelling and simulation of a magnetic levitation systems, Annals of the Oradea University, fascicle of Management and Technological Engineering, vol.v(xv) 2007, ISSN 1583-0691, p.1108-1117
- [8.9]Dolga, V., Dolga, L., The analysis of a magnetic levitation system, 18<sup>th</sup> Intern. Symp. DAAAM 2007, p.247, Zadar (Croatia)
- [8.10]Dolga, V., Dolga, L., The principles of analytical mechanics applied to the dynamical analysis of the mechatronic systems, 2<sup>nd</sup> Intern. Conf. “Computational Mechanics and Virtual Engineering”, p.221-226, COMEC 2007, Brașov
- [8.11]Dolga, V., Dolga, L., Saftencu, D., Considerations about the simulation of the robotized grinding – and polishing operations, 9<sup>th</sup> Intern. Conf. of MTM 2004, Acta Technica Napocensis, no.5, vol.III, pp.971-976
- [8.12]Dolga, V., Teodorescu, A., Considerations about the simulation of the robotized grinding-and polishing operations, Robotica & Management, Intern. Journal vol.9, no.2, December 2004, p.33-38, ISSN 1453-2069
- [8.13]Dolga, V., Saftencu, D., Simularea funcțională a transmisiilor mecanice utilizate în construcția roboților industriali, PRASIC’02, vol.III, p.321-326, noiembrie 2002, Brașov, România
- [8.14]Dolga, V., Dolga, L., Filipescu, H., Considerations about the modelling and simulation processes for mechatronic systems, 18<sup>th</sup> Intern. Symp. DAAAM 2007, p.241, Zadar (Croatia)
- [8.15]Dolga, V., Dolga, L., Design, evaluation and optimization in mechatronics, 18<sup>th</sup> Intern. Symp. DAAAM 2007, p.245, Zadar (Croatia)
- [8.16]Dolga, V., ș.a., Platformă de simulare, control și testare cu aplicații în mecatronică, Contract CEEEX 112\_II.03, faza 3 / 2007, Timișoara, 2007
- [8.17]Dolga, V., Dolga, L., Modelling and simulation of mechatronic systems, Mecatronica, 1, 2004, p.34-39
- [8.18]Dragomir, T.L., Teoria sistemelor, Lito. UPT, Timișoara, 1980
- [8.19]Erlbacher, E.A., Force Control Basics, PushCorp, Inc. (force control basics.pdf)
- [8.20]Eykhoff, P., Identificarea sistemelor, Editura Tehnică, București, 1977
- [8.21]Fishwick, P., A taxonomy for simulation modeling based on programming language principles, june, 1996, Univ. Florida (USA)
- [8.22]Flores, K.M, Introduction to Mechanical Behavior of Materials, Handout # 8: Anelasticity,
- [8.23]Fritzson, P., Principles of object-oriented modeling and simulation with Modelica, sept. 2003 (www.Modelica.org)
- [8.24]Isermann R.: Mechatronische Systeme, Springer-Verlag , Berlin,1999
- [8.25]Madhusudan, T.N., A review of Bond-graph representation based design methodologies, Robotics Institute Carnegie Mellon University Pittsburgh, CMU-RI\_TR-95-28, 1995
- [8.26]Nicolau, E., Analogie, modelare, simulare cibernetică, Ed. Științifică și enciclopedică, București, 1977
- [8.27]Preumont A.: Mechatronics. Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric

- Systems, Springer, London, 2006
- [8.28]Roşculeţ, M., Analiză matematică, Ed. didactică și pedagogică, Bucureşti, 1973
- [8.29]Savii, G.G., Luchin, M., Modelare și simulare, Ed. Eurostampa, Timișoara, 2000
- [8.30]Seo, K., Fan, Z., Hu, J., Goodman, E.D., Rosenberg, C.R, Toward an Automated Design Method for Multi-Domain Dynamic Systems Using Bond Graphs and Genetic Programming, (-)
- [8.31]Sermesant, M., Modèles électromécanique du cœur pour l'analyse d'image et la simulation, These, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2003
- [8.32]Shah, J.J., Mantyla, M., Parametric and feature-based CAD/CAM. Concepts, techniques, and applications, John Wiley&Sons, Inc., New York, 1995
- [8.33]Shetty, D., Kolk A.R.: Mechatronics System Design, PWS Publis. Comp., Boston, 1997
- [8.34]Singh, K., Agnihotri, G., System Design through Matlab, Control Toolbox and Simulink, vol.I, II, Springer Verlag, London, 2001
- [8.35]Sulistio, A., Yeo, C.S., Buyya, R., A taxonomy of computer-based simulations and its mapping to parallel and distributed systems simulation tools, Softw. Pract. Exper. 2004, 653-673, 2004
- [8.36]Teodorescu,A., Dolga, V., The friction forces in the mechatronics systems, 2<sup>nd</sup> Intern. Conf. "Computational Mechanics and Virtual Engineering", p.181-186, COMEC 2007, Braşov
- [8.37]Teodorescu,A., Dolga, V., About the observability and controllability of a levitation systems, 18<sup>th</sup> Intern. Symp. DAAAM 2007, Zadar (Croatia)
- [8.38]Teodorescu, P.P., Ille, V., Teoria elasticității și introducerea în mecanica solidelor deformabile, Editura Dacia, Cluj – Napoca, 1976
- [8.39]Timotin, A.; Hortopan, V.; Ifrim, A. & Preda, M. (1970) Lecții de Bazele Electrotehnicii, EDP, Bucureşti 1970
- [8.40]Țițeica, Ș., Termodinamica, Ed. Academiei, 1982
- [8.41]Vâlcovici, V., ș.a, Mecanică teoretică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1963
- [8.42]Wellstead P.E.: Introduction to Physical System Modelling, Electronic edition, Control Systems Principles, Kent, 2000
- [8.43]\*\*\*, Simulink. Simulation and Model-Based Design, V.6, MathWorks, 2006
- [8.44]\*\*\*, Dymola. Dynamic Modeling Laboratory, User's Manual, Vers. 4.2b, Dynasim AB, Lund (Suedia), 2002
- [8.45]\*\*\*, Getting Started with 20\_Sim, vers. 3.6, Controllab Products, Enschede (Suedia), 2004
- [8.46]\*\*\*, ISP Glossary, <http://isp.webopedia.com/TERM/s/simulation.html>
- [8.47]\*\*\*, EuroSim Mk3.2, <http://www.eurosim.nl/support/manual/html/SUM/ B.html>
- [8.48]\*\*\*, SimMechanics. For Use with Simulink, Version 2, MathWorks, 2006
- [8.49]\*\*\*, SimPowerSystems. For Use with Simulink, Version 4, MathWorks, 2006
- [8.50]\*\*\*, LabView. Basic Manual, National Instruments, 1998