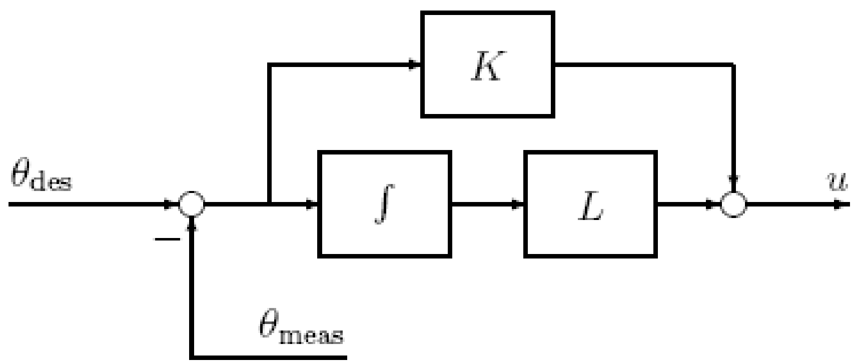
Departamentul de MECATRONICĂ

Facultatea de MECANICĂ

UNIVERSITATEA POLITHENICA TIMIŞOARA

TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE



Prof. dr. ing. Valer DOLGA,

Cuprins_13

1. Abaterea de regim stationar
2. Exemple
3. Control proportional

Introducere

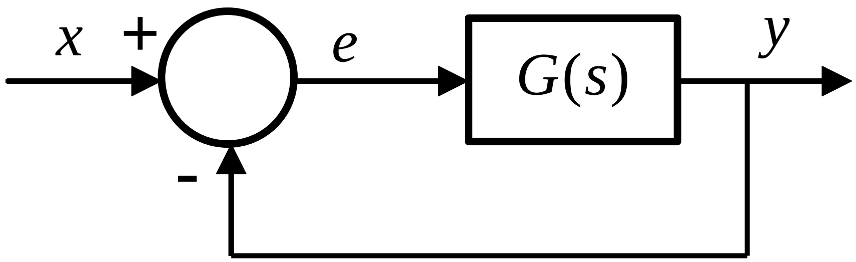
Soluţia unei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:
- O componentă tranzitorie;
- O componentă staţionară.

În cazul sistemelor automate este de dorit a se stabili abaterile staţionare generate de mărimea de intrare.

Abaterea staţionară = mărimea de ieşire staţionară prescrisă – mărimea de ieşire reală

Cerinţe de proiectare pentru un sistem de reglare automat:
- Sensibilitate;
- **Stabilitate;**
- Abaterile la frecvenţă joasă;
- Precizie;
- **Abaterile staţionare** etc

Eroarea de regim stationar



Transformata Laplace a abaterii este:

$$E(s) = X(s) - Y(s) \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{X(s)}{1+G(s)}$$

Se consideră adecvate pentru proiectarea sistemelor automate trei tipuri de funcţii de intrare:

- Funcţia treaptă de poziţie: $x = A$
- Funcţia rampă de poziţie (funcţia treaptă de viteză): $x = vt$
- Funcţia treaptă de acceleraţie $x = \frac{1}{2}at^2$

Teorema valorii finale – permite determinarea funcţiei de timp la momentul t → ∞

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Teorema valorii iniţiale – permite determinarea funcţiei de timp la momentul t → 0

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s)$$

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_3 s+1)\cdots}{s^n(\tau_2 s+1)(\tau_4 s+1)\cdots}$$

n= 0 – sistem tip “zero”

n= 1 – sistem tip “1”

n= 2 – sistem tip “2”

…

Abaterea staţionară pentru o funcţie treaptă aplicată unui sistem închis

$$X(s) = \mathcal{L}\{A\} = \frac{A}{s}$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{A/s}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{1+G(s)} = \frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}$$

- sistem tip “0”

$$\varepsilon_0 = \frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)} = \frac{A}{1+K}$$

- sistem tip “1”

$$\lim_{s\to 0}G(s) = \frac{K}{0\cdot 1} = \infty \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)} = \frac{A}{1+\infty} = 0$$

•sistem tip "2"

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \frac{K}{0 \cdot 1} = \infty$$

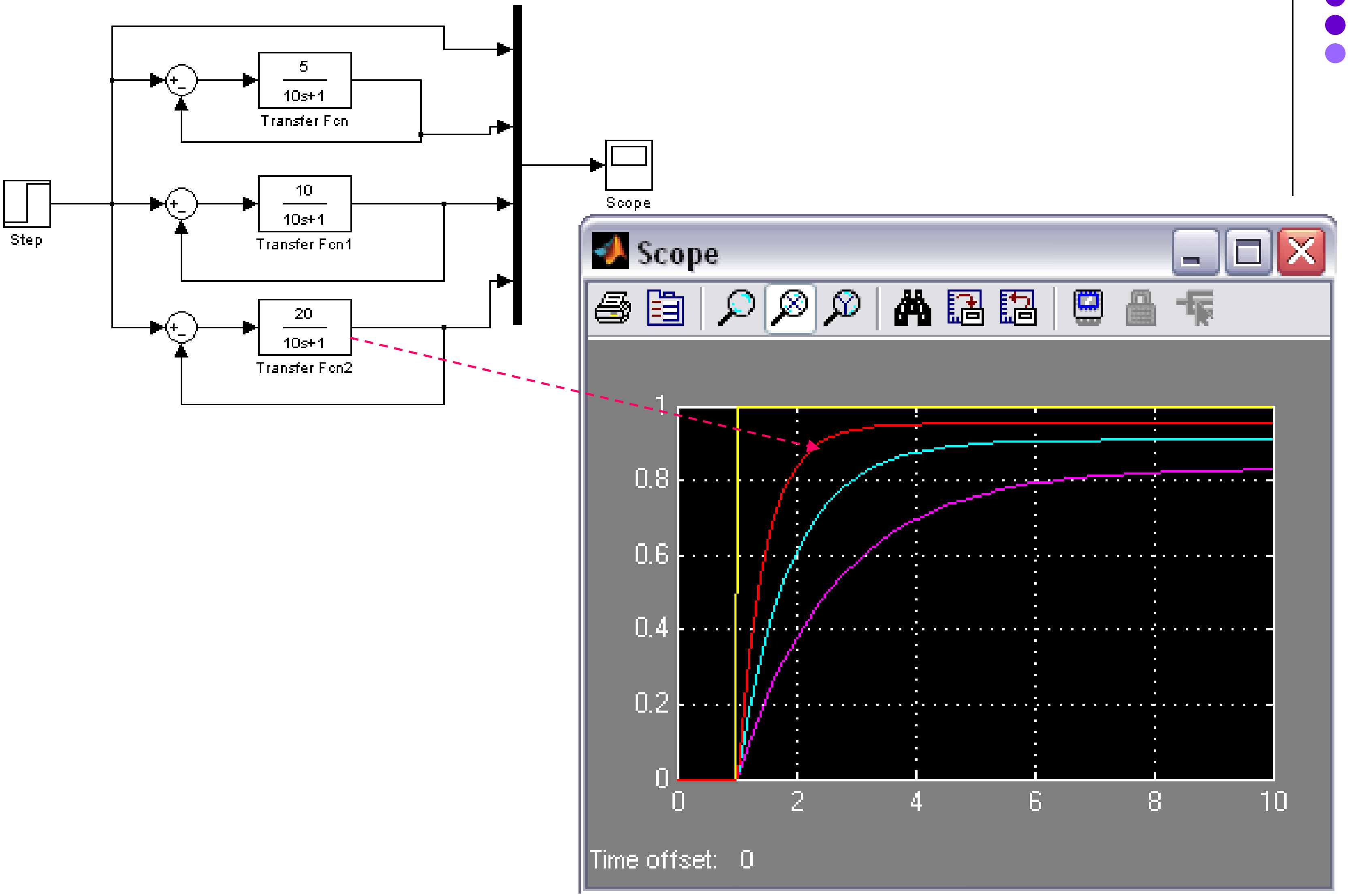
$$\varepsilon_0 = \frac{A}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} = \frac{A}{1 + \infty} = 0$$

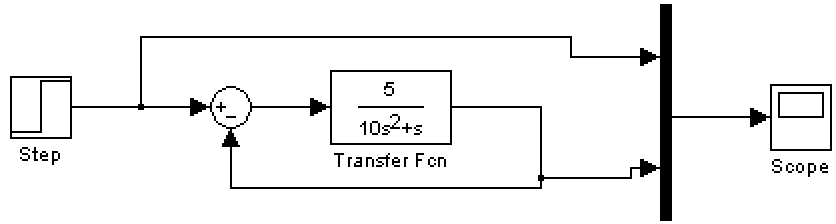
OBS.:

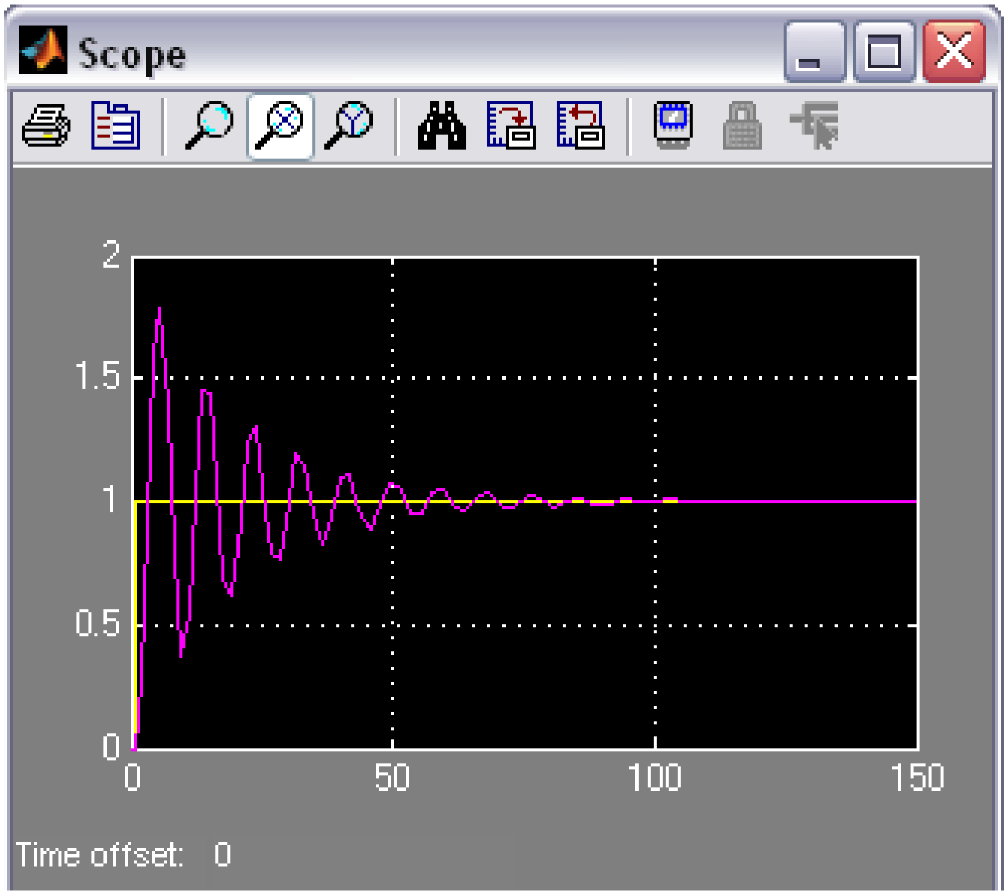
•Pentru un sistem tip 0 , abaterea este finita si depinde de valoarea semnalui treapta si amplificarea K a obiectului reglat;

•Pentru sistemul tip 1, 2, …abaterea stationara in timp la semnal treapta este zero

Exemplu_1


5
10s+1
Transfer Fcn
10
10s+1
Transfer Fcn1
20
10s+1
Transfer Fcn2
Step
Scope
Scope
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
Time offset: 0


5
10s2+s
Step
Transfer Fcn
Scope


Scope
2
1.5
1
0.5
0
0
50
100
150
Time offset: 0

Abaterea staţionară pentru o funcţie rampa aplicată unui sistem închis

$$X(s) = \mathcal{L}\{vt\} = \frac{v}{s^2}$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{v/s^2}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{v}{s+sG(s)} = \frac{v}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)}$$

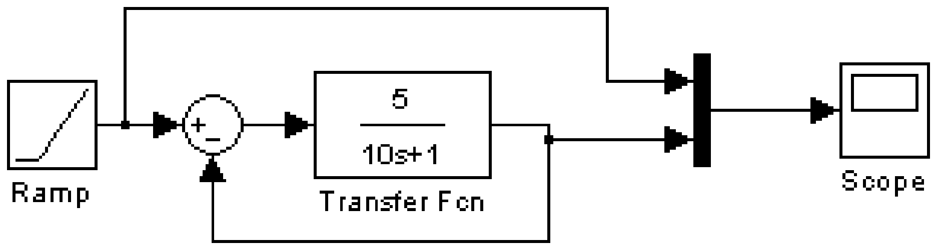
$$\varepsilon_0 = \frac{v}{K_v}$$

- sistem tip “0”

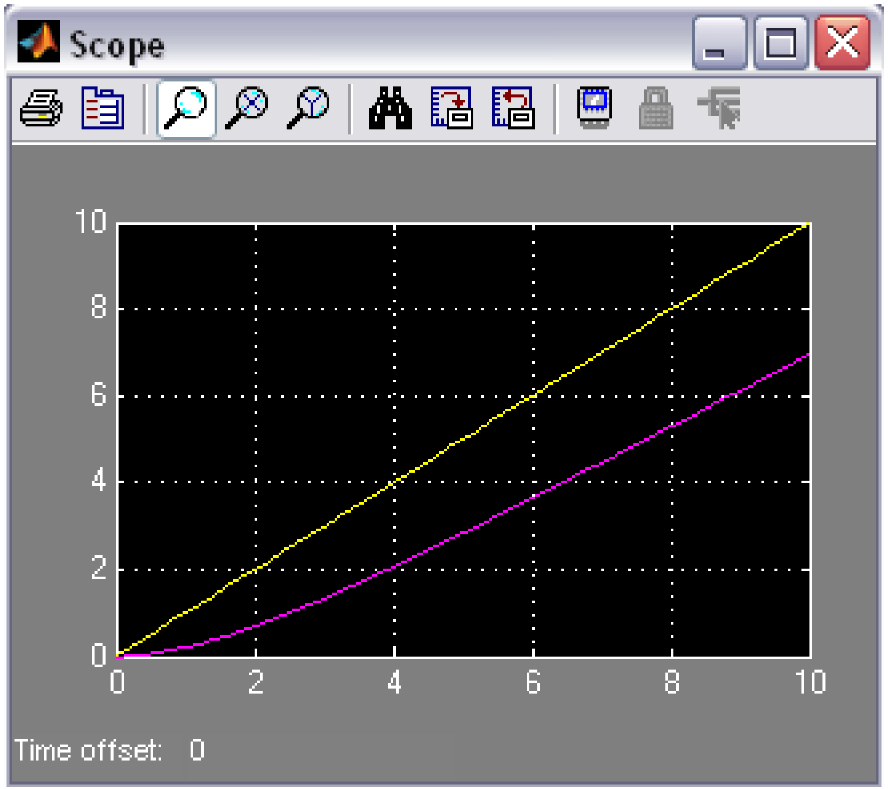
$$\varepsilon_0 = \frac{v}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = \frac{v}{0\cdot K} = \infty \Rightarrow K_v = 0$$

pentru un sistem tip 0 , abaterea este infinită; acest sistem nu poate urmări urmări o funcţie rampă

Exemplu_2



Ramp
5
10s+1
Transfer Fcn
Scope



Scope
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
Time offset: 0

•sistem tip “1”

$$\lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{K}{1} = K \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{v}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{v}{K} \Rightarrow K_v = K$$

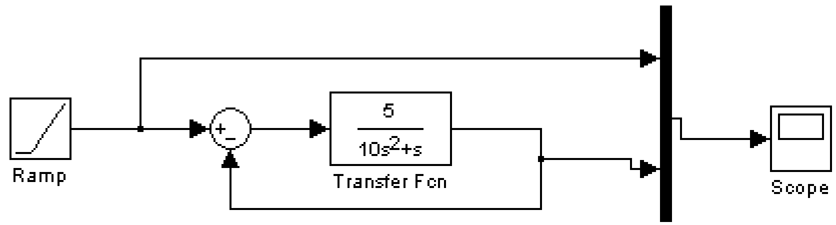
OBS.: pentru un sistem tip 1, abaterea este proporţională cu viteza;

•sistem tip “2”

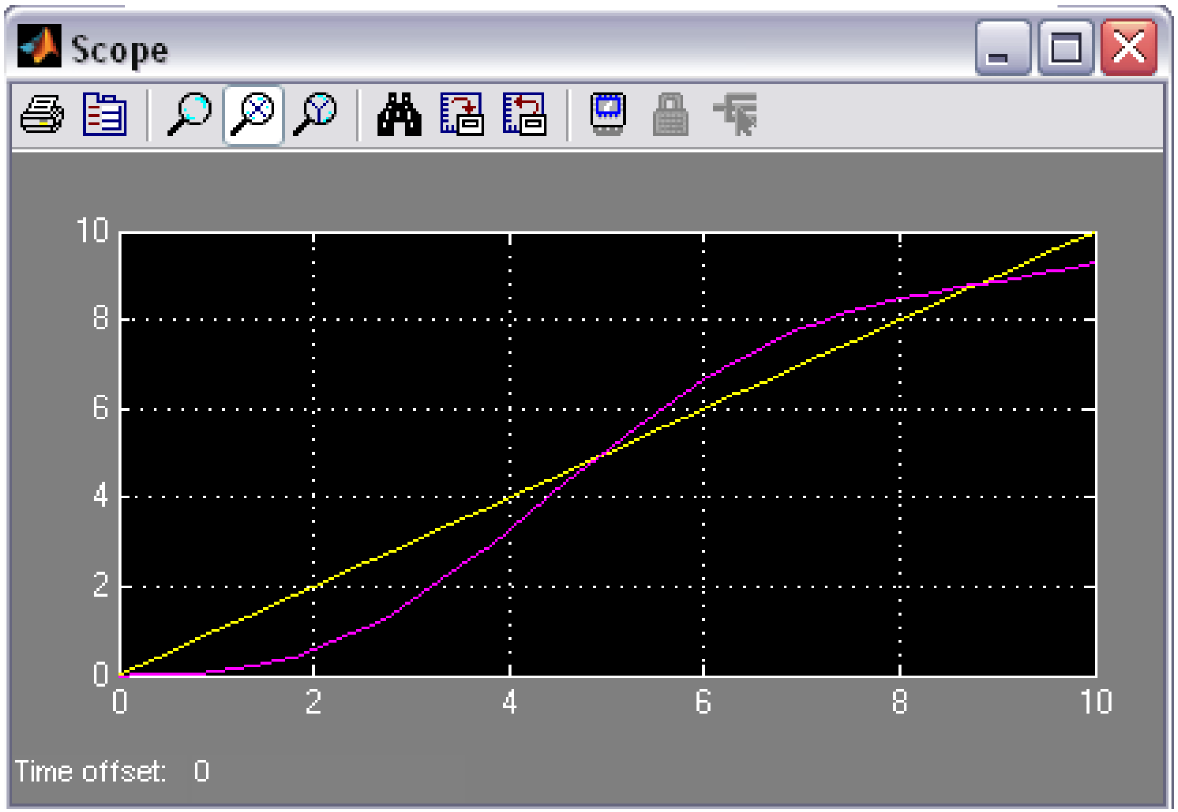
$$\lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{K}{0\cdot 1} = \infty \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{v}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{v}{\infty} = 0 \Rightarrow K_v = \infty$$

OBS.: un sistem tip 2 sau ordin superior, abaterea este zero; aceste sisteme urmăresc funcţia rampă cu precizie

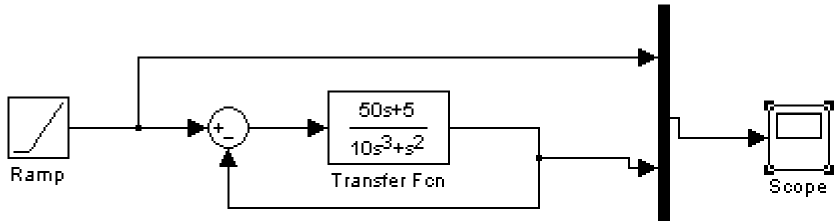
Exemplu_3



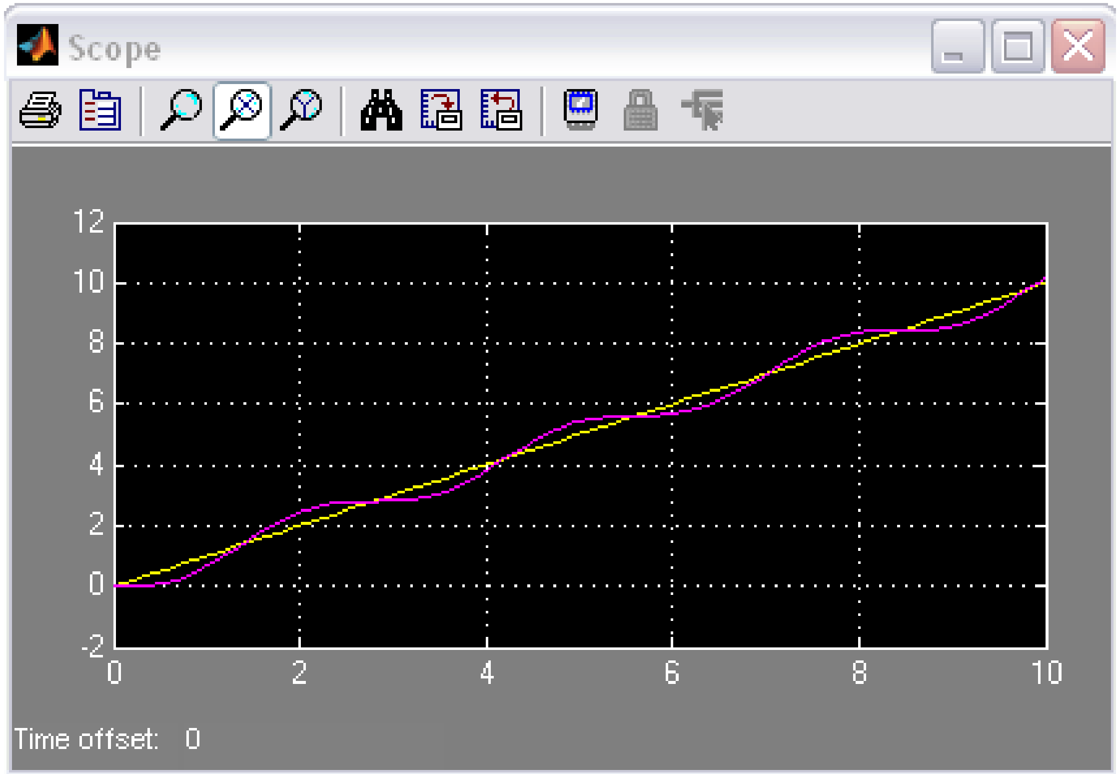
Ramp
+
–
5
$\frac{5}{10s^2+s}$
Transfer Fcn
Scope



Scope
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
Time offset: 0



50s+5
10s3+s2
Ramp
Transfer Fcn
Scope



Scope
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10
Time offset: 0

Abaterea staţionară pentru o funcţie parabolica aplicată unui sistem închis

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}at^2\right\} = \frac{a}{s^3}$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{a/s^3}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{a}{s^2+s^2G(s)} = \frac{a}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{a}{K_a}$$

•sistem tip “0”

$$\varepsilon_0 = \frac{a}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)} = \frac{a}{0\cdot K} = \infty \qquad K_a = 0$$

OBS.: pentru un sistem tip 0 , abaterea este infinită; acest sistem nu poate urmări urmări o funcţie treaptă de acceleraţie

•sistem tip “1”

$$\lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0 \cdot \frac{K}{1} = 0$$

$$\varepsilon_0 = \frac{a}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)} = \frac{a}{0} = \infty$$

$$K_a = 0$$

OBS.: pentru un sistem tip 1, abaterea este infinită;

•sistem tip "2"

$$\lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \frac{K}{1} = K \qquad \varepsilon_0 = \frac{a}{\lim_{s\to 0} s^2 G(s)} = \frac{a}{K} \qquad K_a = K$$

OBS.: un sistem tip 2 sau ordin superior, abaterea este proporţională cu acceleraţia

Denumire	Intrare	Abaterea	Sistem tip "0"		Sistem tip "1"		Sis tip
			Const.	Eroare	Const.	Eroare	Const.
Treaptă	$u(t)$ A	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = K$	$\frac{1}{1+K}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$
Rampă	$tu(t)$ vt	$\frac{1}{K_V}$	$K_v = 0$	∞	$K_v = K$	$\frac{1}{K_V}$	$K_v = \infty$
Parabolă	$\frac{1}{2}u(t)t^2$ $\frac{1}{2}at^2$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = K$

Exemplu_4

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 6s + 8}$$

$$E(s) = \frac{X(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{4}{s^2+6s+8}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2+6s+8}{s^2+6s+12}$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2+6s+8}{s^2+6s+12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

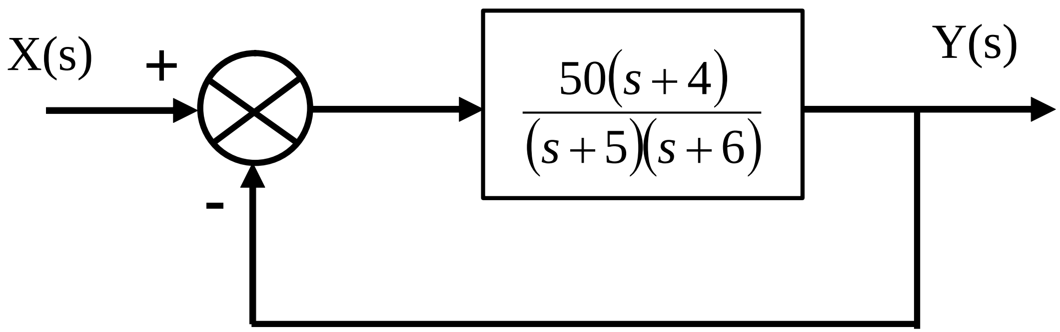
Exemplu_5

Să se determine eroare staţionară pentru intrările:

$$10u(t)$$

$$10tu(t)$$

$$10t^2u(t)$$



Funcţia de transfer a sistemului este

$$G(s) = \frac{50(s+4)}{(s+5)(s+6)}$$

$$X(s) = \mathcal{L}[10u(t)] = \frac{10}{s}$$

$$E(s)=\frac{X(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{10}{s}}{1+\frac{50(s+4)}{(s+5)(s+6)}}=\frac{1}{s}\cdot\frac{10(s^2+11s+30)}{s^2+61s+230}$$

$$\varepsilon_0=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{10(s^2+11s+30)}{s^2+61s+230}=\frac{300}{230}=\frac{30}{23}$$

$$X(s)=\mathcal{L}[10tu(t)]=\frac{10}{s^2}$$

$$E(s)=\frac{X(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{10}{s^2}}{1+\frac{50(s+4)}{(s+5)(s+6)}}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{10(s^2+11s+30)}{s^2+61s+230}$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{10(s^2+11s+30)}{s^2+61s+230} = \frac{1}{0} \cdot \frac{300}{230} = \infty$$

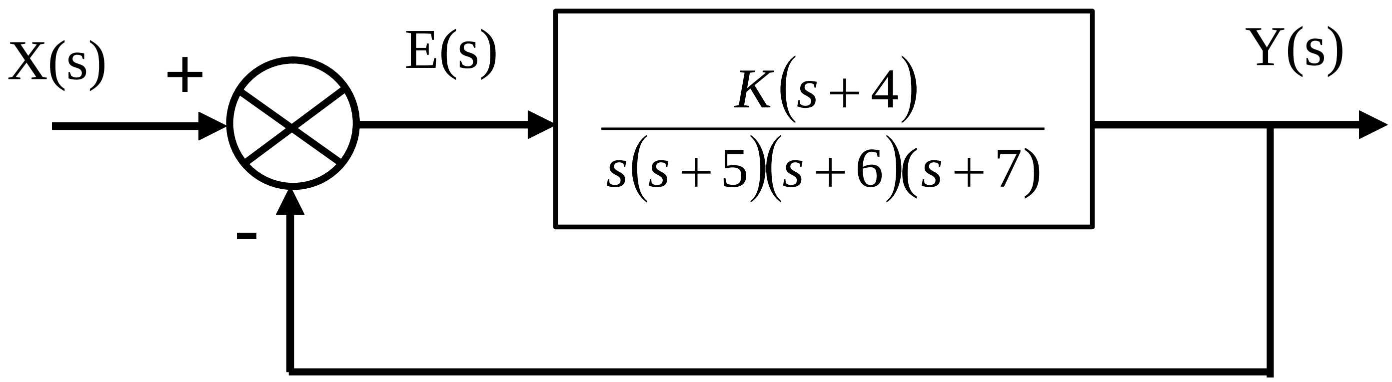
$$X(s) = \mathcal{L}\left[10t^2 u(t)\right] = 10 \cdot \frac{2!}{s^3} = \frac{20}{s^3}$$

$$E(s) = \frac{X(s)}{1+G(s)} = \frac{\dfrac{20}{s^3}}{1+\dfrac{50(s+4)}{(s+5)(s+6)}} = \frac{1}{s^3} \cdot \frac{20(s^2+11s+30)}{s^2+61s+230}$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^3} \cdot \frac{20(s^2+11s+30)}{s^2+61s+230} = \frac{1}{0} \cdot \frac{600}{230} = \infty$$

Exemplu_6

Sistemul din figura are o eroare staţionară permisă de 15 %. Să se determine valoare K pentru cazul dat.



- Sistem tip "1"
- Posibilă aplicarea unei intrări de tip rampă;

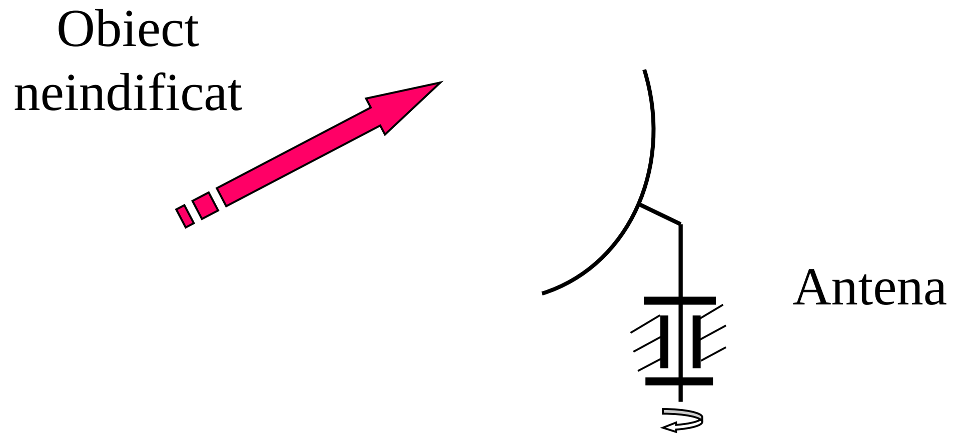
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{K_V} = 0.15$$

$$K_V = \frac{1}{0.15} = 6.66$$

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K\cdot(s+4)}{s(s+5)(s+6)(s+7)} = \frac{4K}{5\cdot 6\cdot 7} = \frac{4K}{210}$$

$$K = \frac{210K_V}{4} = \frac{210\cdot 6.66}{4} = 310$$

Exemplu_7



O antena trebuie sa urmareasca un obiect cu o viteza maxima :

$$\omega = 20 \ rad/\min = \frac{1}{3} \ rad/s$$

si cu o eroare de pozitie maxima de:

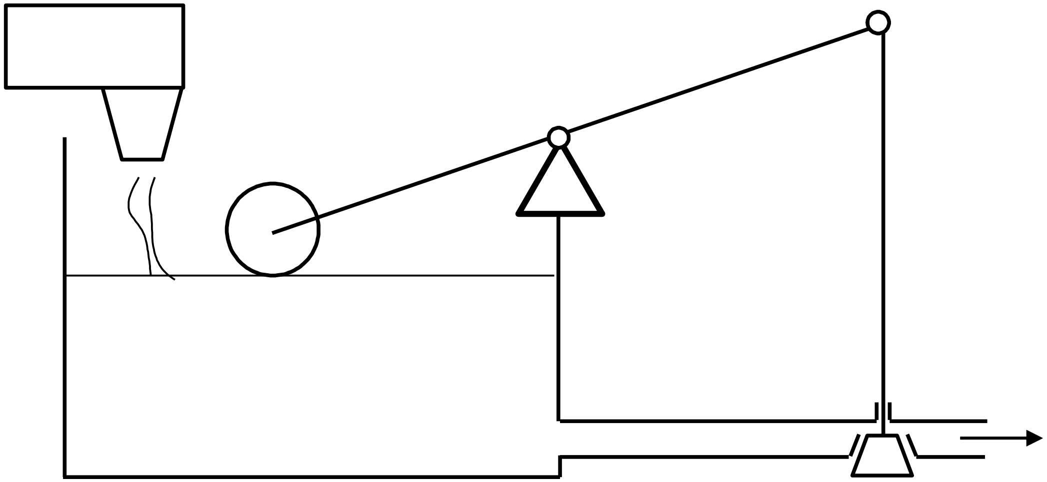
$$0.5^0 = 0.0087 \, rad$$

Ce sistem se poate utiliza si care este coeficientul abaterii stationare ?

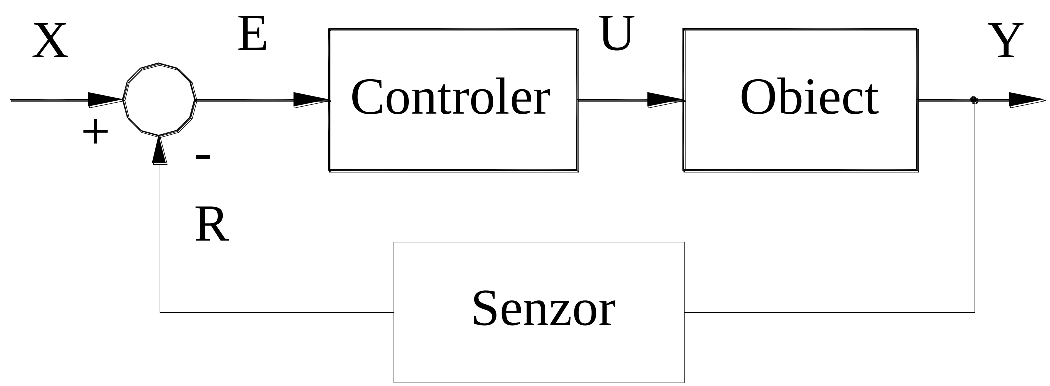
• din tabelul cu coeficienti rezulta ca este necsar un sistem de tip “1”

$$K_V = \frac{v}{\varepsilon_0} = \frac{1/3}{0.0087} = 38.2 \ s^{-1}$$

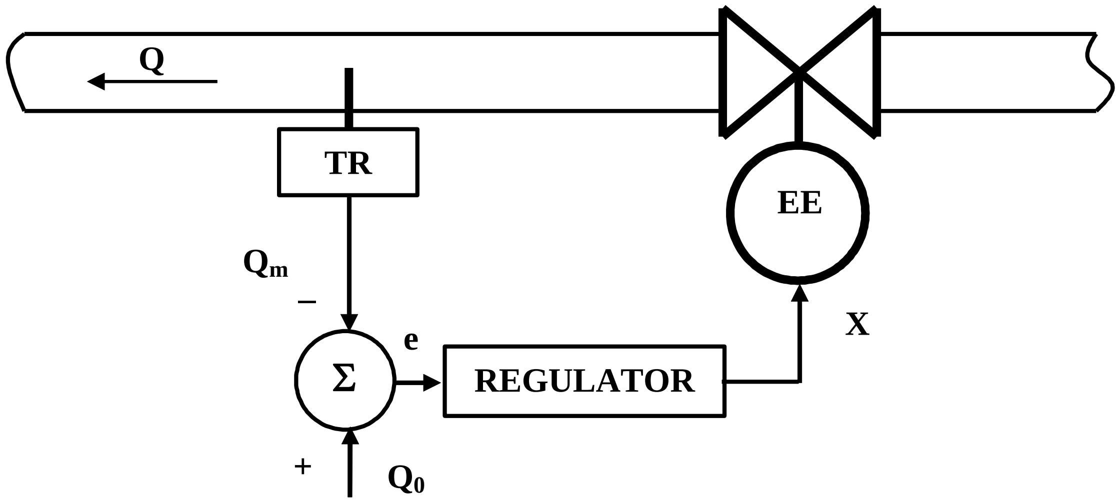
Controler. introducere



Sistem simplu de reglare a nivelului din rezervor



$$E = X - R$$



Debit [l/min]	10	20	40	60	80	100	120	140	150	160	180	200	220	240
Semnal tensiune traductor [V]	0.4	0.85	1.65	2.42	3.22	4	4.77	5.55	6	6.35	7.19	8.03	8.81	9.59

$$S = \frac{variatie\_tensiune}{variatie\_debit} = \frac{9.59 - 0.4}{240 - 10} = 0.0397 \frac{V}{l/min}$$

$$e = U_0 - U_m$$

Clasificare – controler:

- forma relaţiei dintre mărimea de comandă şi eroare:
    - •controlere continue (mărimea de comandă U este influenţată în mod continuu de eroarea E),
    - •controlere discrete;
- natura fizică a mărimilor de la intrarea şi ieşirea controlerului:
    - •controlere electrice,
    - •controlere pneumatice,
    - •controlere hidraulice.
- sursa de energie cu care funcţionează:
    - •controlere directe (funcţionează pe baza energiei preluate din proces prin intermediul traductoarelor de reacţie),
    - •controlere indirecte (cu sursă de energie auxiliară).

Modelul matematic al controlerului cu actiune continua

$$u(t) = K_P \cdot \varepsilon(t)$$

- proporţionale (simbol P);
- K_P este factorul de amplificare al controlerului

$$u(t) = \frac{1}{T_I} \cdot \int \varepsilon(t) \cdot dt = K_I \cdot \int \varepsilon(t) \cdot dt$$

- integrale (simbol I);
- T_I are dimensiune de timp şi se numeşte constanta de integrare

$$u(t) = T_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = K_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

- derivative (simbol D);
- TD are dimensiune de timp şi poartă denumirea de constantă de timp derivativă

• combinaţii: PI, PD, PID. Varianta **PID** este cea mai completă care permite performanţe superioare atât în regim staţionar cât şi regim dinamic:

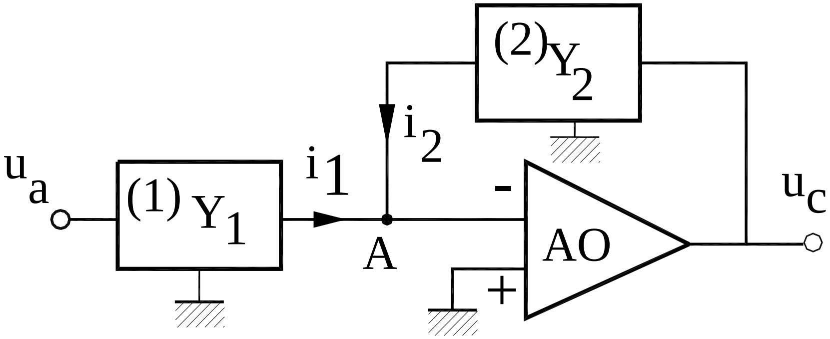
$$u(t) = K_P \cdot \varepsilon(t) + K_I \cdot \int \varepsilon(t) \cdot dt + K_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

	Timpul de creştere	**Supracreşterea**	**Timpul de răspuns**	**Eroarea**
$\mathbf{K_P}$	diminuare	creştere	influenţă redusă	diminuare
$\mathbf{K_I}$	diminuare	creştere	creştere	elimină
$\mathbf{K_D}$	influenţă redusă	diminuare	diminuare	influenţă redusă

Constructia controlerului

1, 2 - circuit pasiv;

AO- amplificator operational



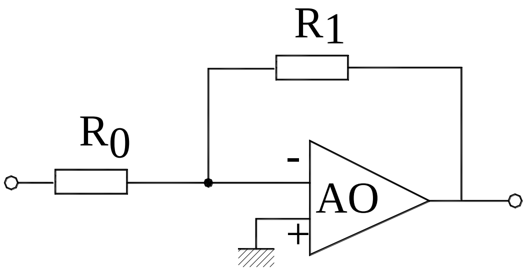
$$Y_1(s) = \frac{I_1(s)}{U_a(s)}$$

$$Y_2(s) = \frac{I_2(s)}{U_c(s)}$$

AO - ideal $\quad i_{AO} = i_1 + i_2 = 0$

$$Y(s) = \frac{U_c(s)}{U_a(s)} = -\frac{Y_1(s)}{Y_2(s)}$$

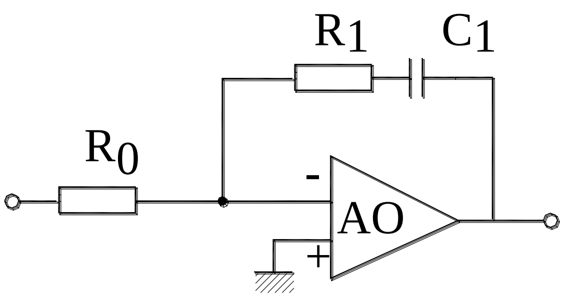
P



$$Z_0(s) = R_0$$
$$Z_1(s) = R_1$$
$$Z_2(s) = 0$$
$$Z_3(s) = \infty$$

$$Y(s) = K_R$$
$$|K_R| = \frac{R_1}{R_0}$$

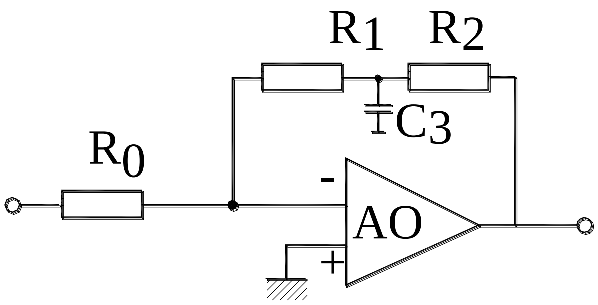
PI



$$Z_0(s) = R_0$$
$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{s \cdot C_1}$$
$$Z_2(s) = 0$$
$$Z_3(s) = \infty$$

$$Y(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_i}\right)$$
$$|K_R| = \frac{R_1}{R_0}$$
$$T_i = R_1 \cdot C_1$$

PD



$$Z_0(s) = R_0$$

$$Z_1(s) = R_1$$

$$Z_2(s) = R_2$$

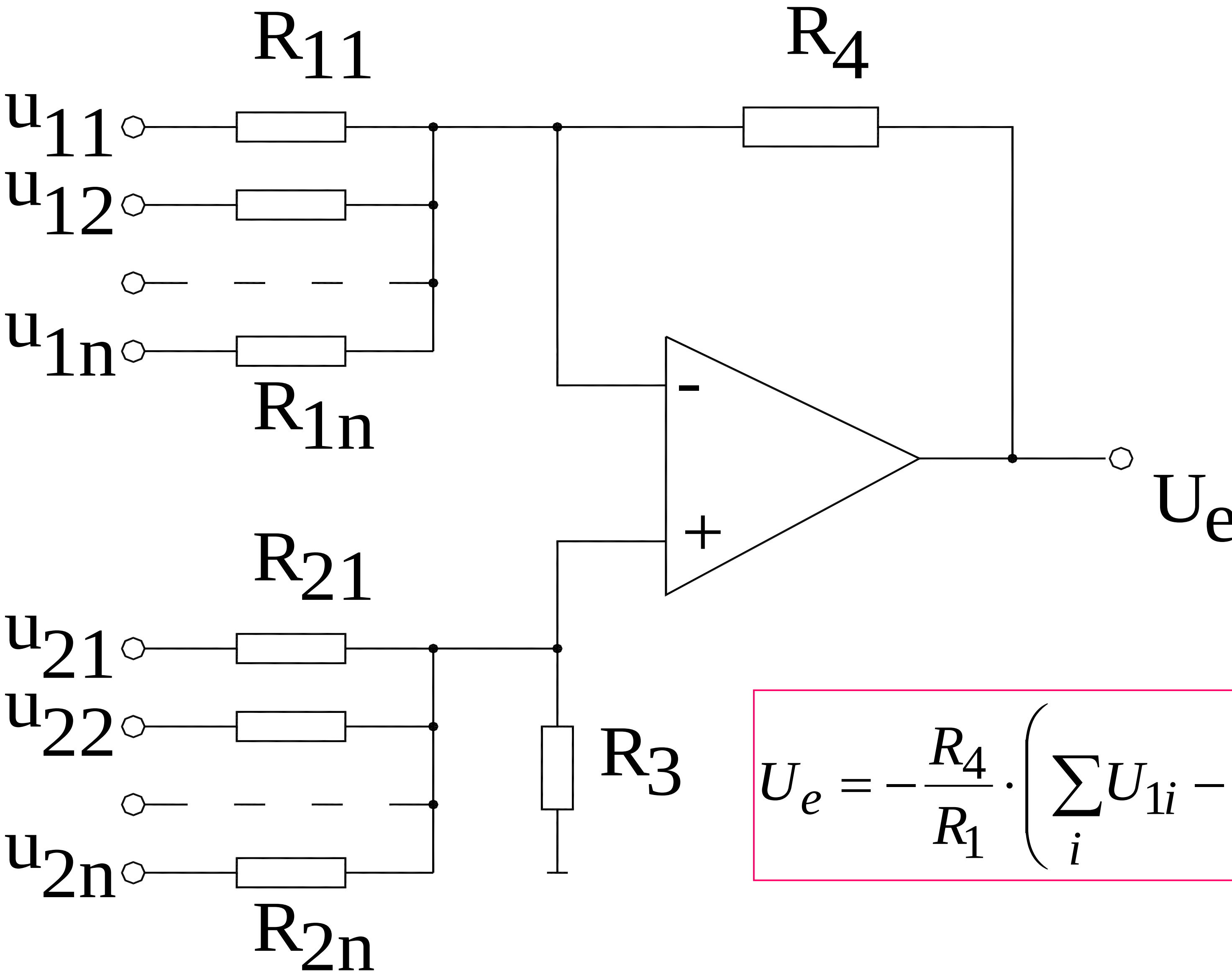
$$Z_3(s) = \frac{1}{s \cdot C_3}$$

$$Y(s) = K_R \cdot (1 + s \cdot T_d)$$

$$|K_R| = \frac{R_1 + R_2}{R_0}$$

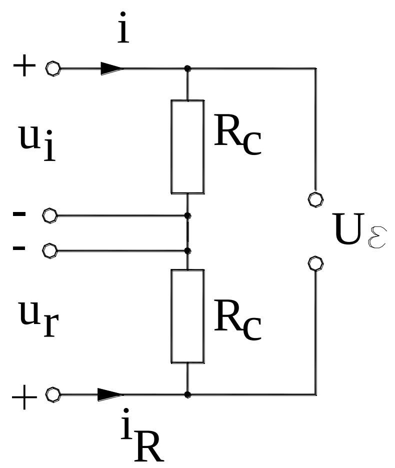
$$T_d = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C_3$$

Bloc – insumare / scadere



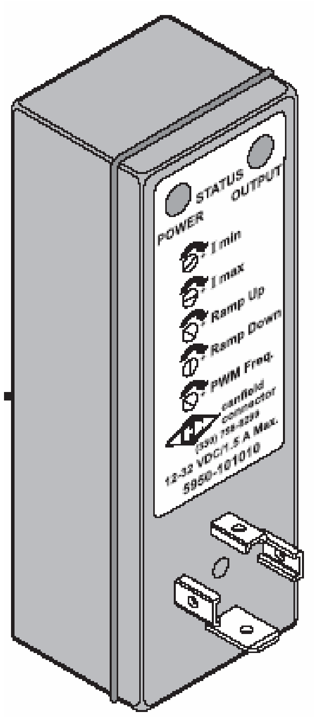
$$U_e = -\frac{R_4}{R_1}\cdot\left(\sum_i U_{1i} - \sum_i U_{2i}\right)$$

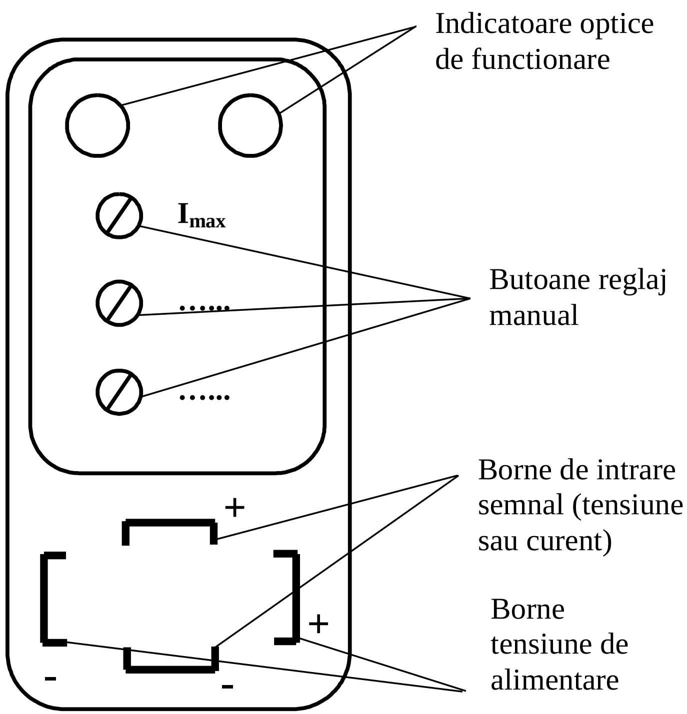
Element de comparatie



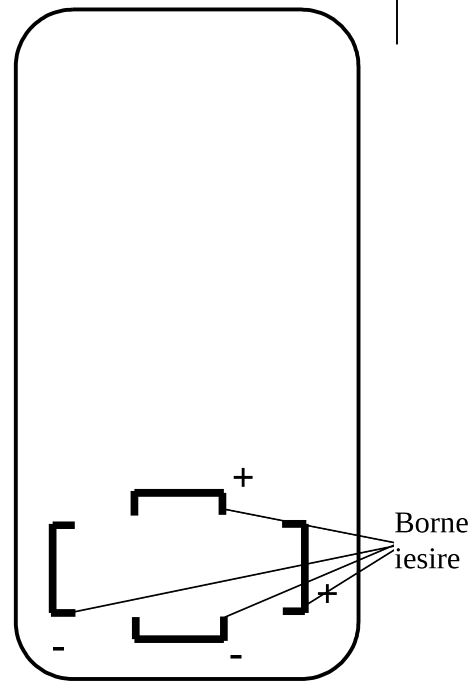
$$U_\varepsilon = R_C \cdot i - R_C \cdot i_R = R_C \cdot i_\varepsilon$$

Controler proportional

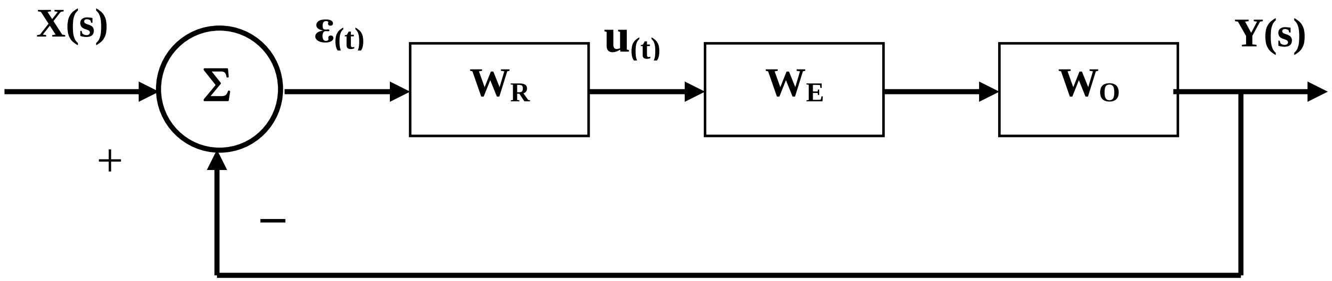




a) vedere din fata



b) vedere din spate



- X(s) este mărimea de intrare (de referinţă) pentru sistem;
- Y(s) este mărimea de ieşire din sistem;
- W_R este funcţia de transfer a controlerului;
- W_E este funcţia de transfer a eventualului element de execuţie (dacă acest element lipseşte, funcţia de transfer se consideră unitară);
- W_O este funcţia de transfer a obiectului / procesului reglat

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_R \cdot W_E \cdot W_O}{1 + W_R \cdot W_E \cdot W_O}$$