

## 2. Analiza cinematică a mecanismelor

**Scopul analizei cinematice** este determinarea stării de mișcare a tuturor elementelor sau a punctelor care aparțin elementelor dintr-un mecanism fără a se ține cont de forțele care acționează asupra mecanismului presupunându-se cunoscută starea de mișcare a elementului/elementelor conducătoare.

Prin **starea de mișcare a unui punct** se înțelege poziția, viteza și accelerația sa pe durata unui ciclu de mișcare. Desfășurarea în timp a poziției unui punct produce traiectoria punctului respectiv, aceasta fiind cunoscută ca legea de mișcare a spațiului.

Traectoria unui punct dintr-un mecanism este locul geometric al pozițiilor succesive pe care le ocupă acel punct într-un ciclu de mișcare.

Prin **starea de mișcare a unui element** se înțelege cunoașterea stării de mișcare (poziție, viteză, accelerație) a atâtor puncte câte sunt necesare pentru a defini în mod univoc poziția elementului considerat (3 puncte în mișcarea în spațiu, 2 puncte pentru mișcarea în plan).

La începutul analizei cinematice a unui mecanism se consideră următoarele ipoteze:

- legile de mișcare (poziții, viteze și accelerații) ale elementului/elementelor conducătoare (motoare) sunt cunoscute
- elementele și zonele de contact dintre elemente (cuplele cinematice) au o rigiditate infinită (sunt nedeformabile), ele păstrându-și forma și dimensiunile indiferent de forțele care acționează asupra lor.

Dacă este necesară o analiză a efectelor forțelor/momentelor ce apar într-un mecanism (excuzând forțe/momente de inerție) se folosesc metode de **analiză cineto-statică**. Aceste metode sunt folosite în cazul în care mecanismul are în structura sa elemente de masa redusă sau elementele se mișcă la viteze mici (în aceste condiții forțele de inerție se pot neglija).

În cazul în care nu se neglijează forțele/momentele de inerție se folosesc metode de **analiză cineto-elasto-dinamice** ale mecanismelor. Acest capitol de analiză a mecanismelor poartă numele de **analiza dinamică** mecanismelor. În această situație se iau în considerare și deformările elastice ale elementelor, respectiv a zonelor de contact dintre elemente rezultând astfel un model matematic foarte complicat al mecanismului.

### 2.1 Analiza cinematică a mecanismelor plane

Un solid (element) în spațiu poate să treacă dintr-o poziție în alta printr-o mișcare elicoidală. Acestei mișcări elicoidale i se poate asocia un șurub. Dacă această mișcare este între două poziții finite, rezultă un șurub al mișcării finite. Dacă pozițiile sunt infinit vecine, mișcarea este caracterizată printr-un șurub instantaneu al mișcării elicoidale.

Dacă mișcarea din spațiu degenerază într-o mișcare plan-paralelă, mișcarea elicoidală de trecere a unui solid dintr-o poziție în alta degenerază într-o mișcare de rotație cu un unghi  $\varphi_{12}$  în jurul unei axe perpendiculare pe planul mișcării, axa care intersectează planul mișcării într-un punct numit **centrul/polul rotației finite**  $P_{12}$  - Fig.1.

Din condițiile de deplasare rezultă că  $P_{12}$  se află la intersecția mediatoarelor segmentelor ce unesc pozițiile omoloage  $A_1A_2$  respectiv  $B_1B_2$  - Fig. 1.

În teoria mecanismelor este uzuală asocierea unui plan fiecărui element care alcătuiește un mecanism. Astfel planul fix este planul legat de elementul fix, un plan mobil poate fi planul legat de biela unui mecanism patrulater, alt plan mobil poate fi asociat manivelei unui mecanism.

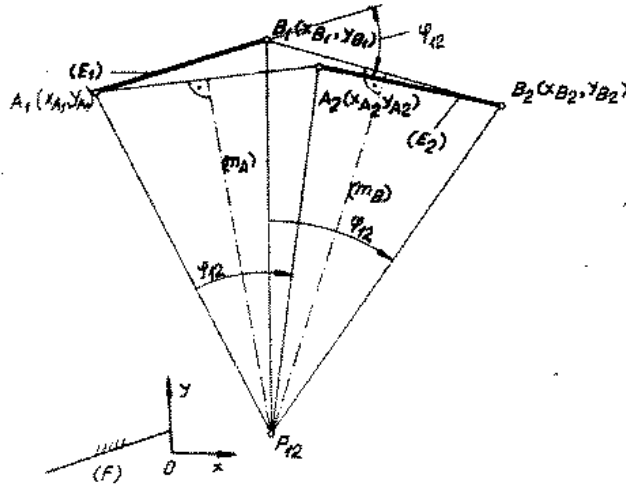


Fig.1 Construirea polului rotațiilor finite

În cazul în care pozițiile E1 și E2 ale elementului mobil sunt infinit apropiate, trecerea se face printr-o rotație infinitezimală instantanee, centrul/polul rotației finite  $P_{12}$  devine **centru instantaneu de rotație (CIR)** și este notat cu  $I$ . În acest caz, în loc de mediatoarele segmentelor  $A_1A_2$  și  $B_1B_2$  se folosesc normalele la traiectoriile a și b generate de punctele A și B în pozițiile considerate Fig.2.

Se notează cu  $t_A, t_B$  tangentele,  $n_A, n_B$  normalele la curbele a și b în punctele A și B.

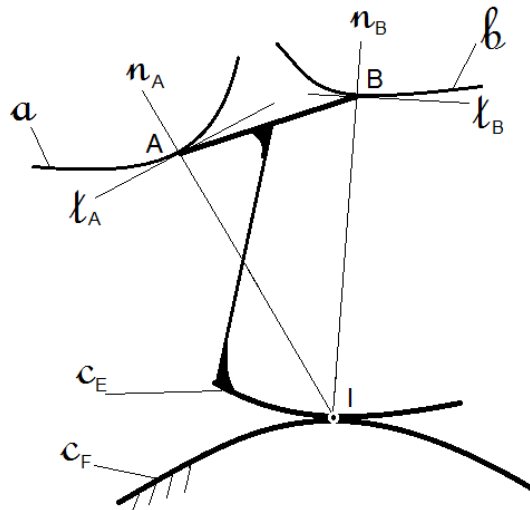


Fig.2 Construirea centrului instantaneu de rotație

Având în vedere faptul că elementul AB execută o mișcare de-a lungul curbelor a și b, implicit și centrul instantaneu de rotație își schimbă poziția.

Locul geometric al CIR în planul elementului fix poartă numele de centroidă fixă ( $C_F$ ), iar locul geometric al CIR în planul elementului mobil E – centroidă mobilă ( $C_E$ ). Mișcarea elementului E în raport cu F este reprodusă identic prin rostogolirea fără alunecare a centroidei  $C_E$  peste  $C_F$ .

La un mecanism cu n elemente se pot identifica

$$N_{CIR} = C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) \quad (1)$$

centre instantanee de rotație, corespunzător oricărei asocieri de câte două elemente  $i$  și  $j$  și observând că  $I_{ij} \equiv I_{ji}$ .

Pentru determinarea tuturor CIR ale unui mecanism se folosește **teorema celor trei CIR (Kennedy)** potrivit căreia, în mișcarea plană a 3 elemente cele 3 CIR sunt colineare. Dacă se consideră elementele  $x,y,z$ , atunci  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  sunt colineare.

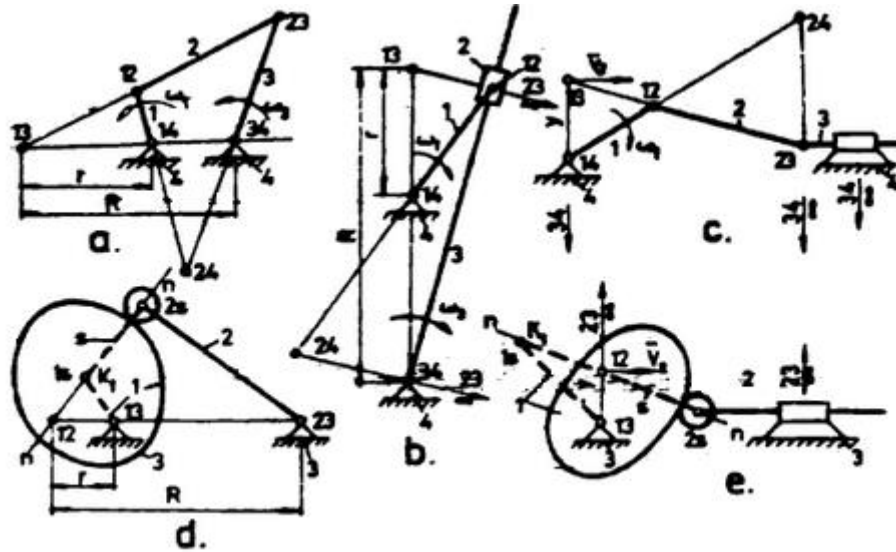


Fig. 3 Determinarea CIR la diferite mecanisme

În Fig. 3 sunt prezentate câteva mecanisme pentru care se determină CIR. Mecanismele din Fig 3a, 3b, 3c au 4 elemente și folosind relația (1) rezultă numărul CIR:

$$N_{CIR} = C_4^2 = \frac{1}{2} 4(4-1) = 6 \text{ CIR (centre instantanee de rotație)}$$

Cuplele de rotație sunt, evident, centre instantanee de rotație, cuplele de translație reprezintă rotații cu rază infinită, deci CIR pentru o cuplă de translație se află la infinit pe o direcție perpendiculară pe direcția de translație. În acest fel se identifică CIR pentru elementele aflate în legătură directă.

Se convine ca notarea CIR să se facă folosind indicii elementelor între care se consideră mișcarea relativă, de exemplu, CIR între elementele 1 și 2 se notează fie 12, fie  $I_{12}$ .

Pentru cazul mecanismelor din Fig. 3a, 3b, 3c numărul CIR ale elementelor care intră în legătură directă este 4 (12, 23, 34, 14), celelalte 2 (13 și 24) fiind determinate folosind teorema celor 3 CIR.

Considerând grupul de elemente 1, 2 și 3, acestea vor avea CIR 12, 23 și 13 colineare, cu 12 și 23 cunoscute. Analizând grupul de elemente 1, 3 și 4 acestea au CIR colineare 14, 34, 13 și primele două sunt cunoscute. Se observă că CIR 13 (necunoscut) apare în ambele combinații, rezultă că el se va afla la intersecția direcțiilor 12-23 cu 14-34 după schema:

$$\left. \begin{array}{l} 12 - 23 \\ 14 - 34 \end{array} \right\} 13 \quad (2)$$

În relația (2) se observă că prin eliminarea pe linie a cifrei comune, apare CIR necunoscut. Procedând în mod similar se poate obține și celălalt CIR necunoscut:

$$\left. \begin{array}{l} 12 - 14 \\ 23 - 34 \end{array} \right\} 24$$

La mecanismul patrulater din Fig.3a, 13 reprezintă CIR în mișcarea relativă a elementelor 1 și 3. Acest punct are aceeași viteză absolută fie că aparține elementului 1 fie că aparține elementului 3 (deci viteză relativă nulă – condiția CIR), adică:

$$v_{I_{13}} = \omega_1 r = \omega_3 R \quad (3)$$

de unde

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{r}{R} \quad (4)$$

deci se poate obține viteza unghiulară a elementului de ieșire 3 în funcție de viteza elementului de intrare 1 cunoscând CIR 13.

La mecanismul manivelă-piston din Fig.3c, CIR 13 va avea viteza absolută a pistonului 3, care se poate determina direct din relația:

$$v_{I_{13}} = v_3 = \omega_1 y \quad (5)$$

Dacă mecanismul conține și cuple superioare, CIR în mișcarea relativă a elementelor legate prin cupla superioară se află pe normala comună la curbele de profil în punctul lor de contact.

## 2.2 Metode analitice de analiză cinematică a mecanismelor

Analiza cinematică se poate face prin:

1. Metode analitice - sunt exacte  
- cer însă un volum mare de calcul
2. Metode grafice sau grafo-analitice – necesită reprezentări la scară a sistemelor de vectori

### 2.2.1 Metoda conturului poligonal.

Dacă fiecărui element al unui mecanism  $i$  se asociază un vector, ca de exemplu  $\vec{l}_j$  pentru elementul  $j$ , și știind că orice mecanism are la bază un lanț cinematic închis, rezultă că se formează contururi vectoriale închise asociate mecanismului.

Numărul contururilor vectoriale este egal cu numărul contururilor poligonale ale mecanismului.

Pentru fiecare contur vectorial se poate scrie o ecuație de forma:

$$\sum l_j = 0 \quad (6)$$

Deoarece mecanismul este desmodrom, se pot determina univoc pozițiile tuturor elementelor pornind de la pozițiile elementelor de intrare scriind ecuații de forma (6). Pentru a obține ecuații independente trebuie luate în considerare contururi independente ale mecanismului.

Numărul contururilor independente se poate determina folosind relația:

$$N = \sum_{i=1}^5 c_i - n + 1 \quad (7)$$

Dacă se consideră mecanismul plan din Fig.4a cu 7 cuple de clasa a 5-a și 6 elemente, acesta poate fi împărțit în trei contururi poligonale, cărora li se asociază câte un contur vectorial. Numărul de contururi independente este 2, calculat folosind relația (7):

$$N = \sum_{i=1}^5 c_i - n + 1 = 7 - 6 + 1 = 2 \quad (8)$$

Pentru acest mecanism se pot scrie următoarele ecuații vectoriale de contur:

$$\begin{aligned} I: \vec{l}_1 + \vec{l}_2 - \vec{l}_3 - \vec{l}_6 &= \vec{0} \\ II: \vec{l}_3 + \vec{l}_2' - \vec{l}_5 - \vec{l}_6' &= \vec{0} \\ III: \vec{l}_1 + (\vec{l}_2 + \vec{l}_2') - \vec{l}_5 - (\vec{l}_6' + \vec{l}_6) &= \vec{0} \end{aligned} \quad (9)$$

dar ecuația pentru conturul  $III'$  rezultă din însumarea ecuațiilor  $I$  și  $II$  deci nu este independentă de acestea.

Un alt criteriu de identificare al independenței unui contur este ca în ecuațiile de forma (6) trebuie să existe cel puțin un vector (asociat unui element al mecanismului) neconținut într-o altă ecuație de contur din sistem.

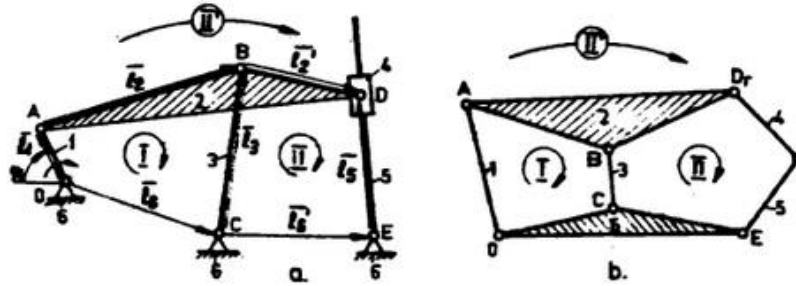


Fig.4 Identificarea conturilor independente ale unui mecanism.

a – direct pe schema cinematică; b – cu ajutorul schemei structurale

Pentru un contur poligonal având  $n$  elemente de lungime și unghiuri dintre elemente cunoscute, se poate scrie următoarea ecuație vectorială:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \lambda_3 + \dots + \bar{l}_n = \bar{l}_M \quad (10)$$

Se notează cu  $\lambda$  vectorul instantaneu pentru poziția cuplei de translație (instantaneu, pentru că poziția cuplei de translație este mobilă), mărimea acestui vector fiind considerată cunoscută. În cazul ecuației (10) acesta poartă indicele 3 pentru că se face referire la elementul 3. De asemenea se consideră cunoscut unghiul  $\beta_2$  din construcția elementului 2.

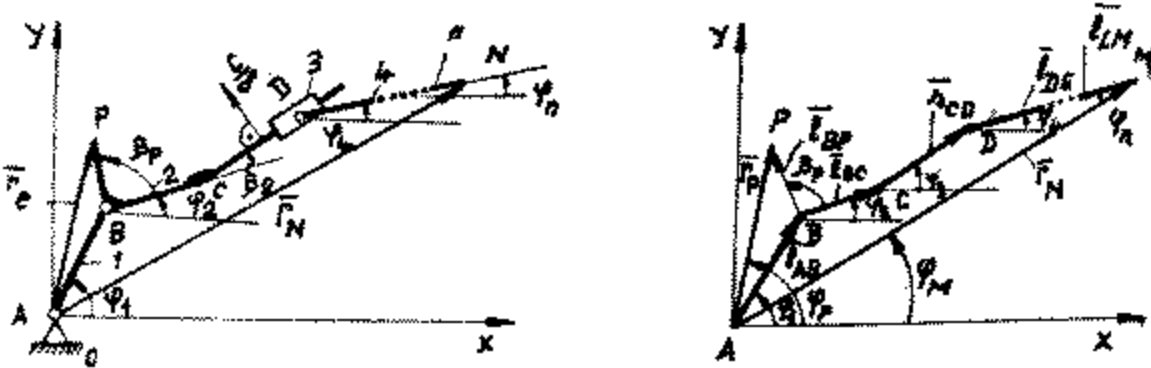


Fig. 5 Contur poligonal cu  $n$  elemente

Relația (10) poate fi exprimată în coordonate polare în planul complex (axa imaginara fiind considerată  $Oy$ ) sub forma:

$$r_M e^{i\varphi_M} = l_1 e^{i\varphi_1} + l_2 e^{i\varphi_2} + \lambda_3 e^{i(\varphi_2 + \beta_2)} + \dots + l_n e^{i\varphi_n} \quad (10')$$

Relația vectorială (10) se poate proiecta pe cele două direcții  $Ox$  și  $Oy$  rezultând astfel următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} Ox : l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + \lambda_3 \cos(\varphi_2 + \beta_2) + \dots + l_n \cos \varphi_n &= l_M \cos \varphi_M \\ Oy : l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + \lambda_3 \sin(\varphi_2 + \beta_2) + \dots + l_n \sin \varphi_n &= l_M \sin \varphi_M \end{aligned} \quad (11)$$

Relația (11) se poate scrie și sub următoarea formă:

$$Ox : l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + \lambda_3 \cos(\varphi_2 + \beta_2) + \dots + l_n \cos \varphi_n - l_M \cos \varphi_M = 0 \quad (12)$$

$$Oy : l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + \lambda_3 \sin(\varphi_2 + \beta_2) + \dots + l_n \sin \varphi_n - l_M \sin \varphi_M = 0$$

(parametrii  $l_i$  și  $\varphi_i$  se consideră cunoscuți)

Dacă mecanismul are la bază un lanț cinematic închis, atunci și parametrii  $l_M$  și  $\varphi_M$  sunt cunoscuți iar pozițiile cuplelor cinematice pot fi determinate

De asemenea, dacă se consideră că mecanismul este desmodrom cu grad de mobilitate  $M$ , iar elementele motoare sunt notate cu  $m$ , pozițiile tuturor celorlalte elemente pot fi determinate în funcție de poziția elementelor motoare  $\lambda_m$  și  $\varphi_m$ .

Urmărind traseul mecanismului, pozițiile celorlalte cuple cinematice se pot determina în funcție de parametrii  $\beta_i, l_i$  (sau  $\lambda_i$  în cazul cuplelor de translație) și parametrii elementelor motoare  $\lambda_m$  și  $\varphi_m$  rezultând astfel dependența funcțională pentru determinarea parametrilor poziționali ai cuplei cinematice n:

$$\varphi_n = \varphi(\varphi_m, \lambda_m, \beta_i, l_i) \quad (13)$$

respectiv

$$\lambda_n = \lambda(\varphi_m, \lambda_m, \beta_i, l_i) \text{ (pentru cuple de translație)} \quad (13')$$

Funcțiile (13) și (13') poartă numele de **funcții de transmitere de ordinul 0 (funcție de poziție)**. Cunoscând parametrii funcțiilor de transmitere de ordin 0 se poate determina poziția oricărei cuple cinematice din structura mecanismului

Având în vedere că  $\lambda_m$  și  $\varphi_m$  sunt parametri ai elementelor motoare și că aceștia sunt variabili în timp, se pot scrie următoarele relații:

$$\lambda_m = \lambda_m(t) \text{ pentru cazul unui motor generator de mișcare liniară} \quad (14)$$

$$\varphi_m = \varphi_m(t) \text{ pentru un motor generator de mișcare rotativă} \quad (14')$$

Dacă se înlocuiesc relațiile (14) și (14') în (13) și (13') se obțin următoarele relații

$$\varphi_n = \varphi(\varphi_m(t), \lambda_m(t), \beta_i, l_i) \quad (15)$$

respectiv

$$\lambda_n = \lambda(\varphi_m(t), \lambda_m(t), \beta_i, l_i) \quad (15')$$

Analizând relațiile (15) și (15') se poate concluziona că pozițiile elementelor și ale cuplelor cinematice care alcătuiesc mecanismul depind de parametrii geometrici dar și de desfășurarea timpului pentru cazul unui mecanism în mișcare.

Aceste relații se derivează în funcție de parametrul timp și se obțin vitezele elementelor și ale cuplelor cinematice care alcătuiesc mecanismul:

$$\omega_n = \dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}(\varphi_m, \dot{\varphi}_m, \lambda_m, \dot{\lambda}_m, \beta_i, l_i) \quad (16)$$

respectiv

$$v_n = \dot{\lambda}_n = \dot{\lambda}(\varphi_m, \dot{\varphi}_m, \lambda_m, \dot{\lambda}_m, \beta_i, l_i) \quad (16')$$

aceste funcții purtând numele de **funcții de transmitere de ordinul 1 (funcții de viteză)**.

Prin  $\omega_n$  se notează viteza unghiulară a elementului n din mecanism dacă acesta execută o mișcare de rotație, respectiv se notează cu  $v_n$  viteza liniară a elementului dacă acesta execută o mișcare de translație.

Relațiile (16) și (16') se derivează încă o dată în funcție de timp pentru a obține funcțiile de transmitere de ordinul 2 (funcții de accelerație), astfel rezultă următoarele relații:

$$\varepsilon_n = \dot{\omega}_n = \ddot{\varphi}_n = \ddot{\varphi}(\varphi_m, \dot{\varphi}_m, \ddot{\varphi}_m, \lambda_m, \dot{\lambda}_m, \ddot{\lambda}_m, \beta_i, l_i) \quad (17)$$

$$a_n = \dot{v}_n = \ddot{\lambda}_n = \ddot{\lambda}(\varphi_m, \dot{\varphi}_m, \ddot{\varphi}_m, \lambda_m, \dot{\lambda}_m, \ddot{\lambda}_m, \beta_i, l_i) \quad (17')$$

Se notează cu  $\varepsilon_n$  accelerația unghiulară a elementului n din mecanism dacă acesta execută o mișcare de rotație, respectiv se notează cu  $a_n$  accelerația liniară a elementului dacă acesta execută o mișcare de translație.

Cunoscând că  $\lambda_n, \dot{\lambda}_n, \ddot{\lambda}_n, \varphi_n, \dot{\varphi}_n, \ddot{\varphi}_n$  sunt funcții dependente de timp, se obțin următoarele relații:

$$\text{din (15)} \quad \varphi_n = \varphi_n(t) \quad (18)$$

$$\text{din (15')} \quad \lambda_n = \lambda_n(t) \quad (18')$$

$$\text{din (16)} \quad \omega_n = \dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_n(t) \quad (19)$$

$$\text{din (16')} \quad v_n = \dot{\lambda}_n = \dot{\lambda}_n(t) \quad (19')$$

$$\text{din (17)} \quad \varepsilon_n = \ddot{\varphi}_n = \ddot{\varphi}_n(t) \quad (20)$$

$$\text{din (17')} \quad a_n = \ddot{\lambda}_n = \ddot{\lambda}_n(t) \quad (20')$$

În Fig.5 punctul P, aparținând elementului 2, are vectorul de poziție  $\bar{r}_P$ .

$$\bar{r}_P = \bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BP} \quad (21)$$

$$r_P e^{i\varphi_P} = l_{AB} e^{i\varphi_1} + l_{BP} e^{i(\varphi_2 + \beta_P)} \quad (22)$$

sau

$$\begin{cases} x_P = r_P \cos \varphi_P = l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BP} \cos(\varphi_2 + \beta_P) \\ y_P = r_P \sin \varphi_P = l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BP} \sin(\varphi_2 + \beta_P) \end{cases} \quad (23)$$

dar parametrii  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt variabili în funcție de timp, astfel și  $x_P$  respectiv  $y_P$  vor fi la rândul lor dependenți de timp rezultând sistemul:

$$\begin{cases} x_P = x_P(t) \\ y_P = y_P(t) \end{cases} \quad (24)$$

Ecuția (24) numită și funcție de transmitere de ordin 0, reprezintă ecuația parametrică a traiectoriei punctului P în funcție de (parametrul) timp. Pentru a obține forma explicită a funcției care descrie traiectoria punctului P se va elimina timpul din relația (24) rezultând:

$$y_P = y_P(x_P) \quad (25)$$



Viteza de deplasare a punctului P se poate obține prin derivarea ecuației (24) în raport cu timpul, obținându-se astfel forma parametrică a ecuației vitezei, numită și funcție de ghidare de ordin 1:

$$\begin{cases} v_{Px} = \dot{x}_P = \dot{x}_P(t) \\ v_{Py} = \dot{y}_P = \dot{y}_P(t) \end{cases} \quad (26)$$

Eliminând parametrul timp din relația (26) obținem ecuația explicită a vitezei punctului P, numită hodograful polar al vitezelor:

$$v_{Py} = v_{Py}(v_{Px}) \quad (27)$$

Derivând ecuațiile (26) în raport cu timpul, rezultă:

$$\begin{aligned} a_{Px} &= \dot{v}_{Px} = \ddot{x}_P = \ddot{x}_P(t) \\ a_{Py} &= \dot{v}_{Py} = \ddot{y}_P = \ddot{y}_P(t) \end{aligned} \quad (28)$$

funcțiile care reprezintă variația în raport cu timpul  $t$  a proiecțiilor accelerației punctului P pe axele Ox și Oy. Acestea poartă denumirea de funcții de ghidare de ordinul 2.

Eliminând parametrul  $t$  între ecuațiile sistemului (28) se obține

$$a_{Py} = a_{Py}(a_{Px}) \quad (29)$$

ecuația hodografului polar al accelerațiilor punctului P.

**Mecanismul bielă-manivelă (manivelă-piston)** este folosit în transformarea mișcării de rotație a elementului 1 într-o mișcare de translație a elementului 3, sau invers.

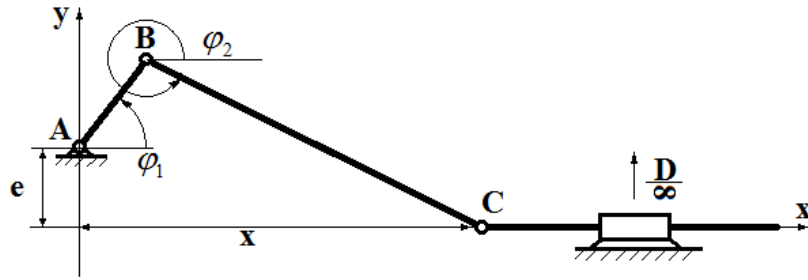


Fig. Mecanismul bielă-manivelă

Se dorește determinarea stării de mișcare a punctului C scriind ecuația vectorială corespunzătoare conturului poligonal ABC:

$$\vec{l}_{AB} + \vec{l}_{BC} + \vec{l}_{AC} = 0$$

Proiectând pe axe rezultă:

$$\begin{cases} Ox : l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BC} \cos \varphi_2 - x = 0 \\ Oy : l_{AB} \sin \varphi_1 - l_{BC} \sin \varphi_2 + e = 0 \end{cases}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{e}{l_{BC}} + \frac{l_{AB}}{l_{BC}} \sin \varphi_1 = k + \lambda \sin \varphi_1$$

unde  $\lambda = \frac{l_{AB}}{l_{BC}}$  - raportul dintre lungimea manivelei și cea a bieiei, uzual are valori între 0.2 și 0.33

$k = \frac{e}{l_{BC}}$  - excentricitatea relativă, uzual are valori între 0 și 0.15

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2} = \sqrt{1 - (k + \lambda \sin \varphi_1)^2} = (1 - (k + \lambda \sin \varphi_1)^2)^{\frac{1}{2}}$$

dezvoltând în serie binomială rezultă

$$\cos \varphi_2 = 1 - \frac{1}{2}(k + \lambda \sin \varphi_1)^2 - \frac{1}{8}(k + \lambda \sin \varphi_1)^4 - \dots$$

Cum  $\sin \varphi_1 < 1$ ,  $k < \lambda$  și  $\lambda < \frac{1}{3}$  se rețin numai primii doi termeni din seria binomială rezultând relația:

$$x = l_{AB} \left[ \cos \varphi_1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} (k + \lambda \sin \varphi_1)^2 \right]$$

funcția de transmitere de ordinul 0

$$v = \dot{x} = -\omega_{AB} l_{AB} \left[ \sin \varphi_1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{2\lambda} (k + \lambda \sin \varphi_1) \lambda \cos \varphi_1 \right]$$

$$v = \dot{x} = -\omega_{AB} l_{AB} \left[ \sin \varphi_1 + k \cos \varphi_1 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi_1 \right]$$

funcția de transmitere de ordinul 1

$$a = \dot{v} = -\varepsilon_{AB} l_{AB} \left( \sin \varphi_1 + k \cos \varphi_1 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi_1 \right) - \omega_{AB}^2 l_{AB} (\cos \varphi_1 - k \sin \varphi_1 + \lambda \cos 2\varphi_1)$$

funcția de transmitere de ordinul 2

**Mecanismul cu culisă oscilantă** este utilizat pentru transformarea unei mișcări de rotație a elementului motor într-o mișcare de oscilație a elementului condus. Pentru acest mecanism se dorește determinarea unghiului  $\varphi_3$  pe care îl face elementul 3 cu direcția Ox, și de asemenea a derivatelor acestuia în raport cu timpul (viteza unghiulară, accelerație unghiulară)

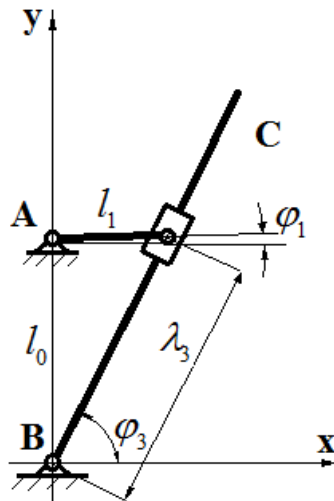


Fig. Mecanism cu culisă oscilantă

Se scrie ecuația vectorială corespunzătoare conturului mecanismului:

$$\vec{l}_0 + \vec{l}_1 + \vec{\lambda}_3 = 0$$

relația se proiectează pe axe și rezultă:

$$\begin{cases} Ox: l_1 \cos \varphi_1 - \lambda_3 \cos \varphi_3 = 0 \\ Oy: l_0 + l_1 \sin \varphi_1 - \lambda_3 \sin \varphi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 \cos \varphi_3 = l_1 \cos \varphi_1 \\ \lambda_3 \sin \varphi_3 = l_0 + l_1 \sin \varphi_1 \end{cases}$$

$$\tan \varphi_3 = \frac{l_0 + l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \cos \varphi_1}$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{l_0 + l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \cos \varphi_1}$$

funcția de transmitere de ordinul 0

$$\omega_3 = \dot{\varphi}_3 = \frac{\left( \frac{l_0 + l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \cos \varphi_1} \right)^l}{1 + \left( \frac{l_0 + l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \cos \varphi_1} \right)^2} = \omega_1 l_1 \frac{l_1 + l_0 \sin \varphi_1}{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}$$

funcția de transmitere de ordinul 1

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \varepsilon_1 l_1 \frac{l_1 + l_0 \sin \varphi_1}{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2} - \omega_1^2 l_0 l_1 \frac{(l_1^2 - l_0^2) \cos \varphi_1}{(l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2)^2}$$

funcția de transmitere de ordinul 2

## 2.2.2 Analiza cinematică a mecanismelor pe baza conexiunilor

Această metodă permite analizarea mecanismelor pas cu pas, pornind de la elementul motor, trecând la următoarele elemente seama de conexiunile ce există între acestea. Metoda este avantajoasă în cazul în care se analizează mecanisme complexe (conțin elemente ternare, cuaternare etc)

O conexiune introdusă între două elemente limitează gradele de libertate în mișcarea relativă a acestora prin intermediul unor constrângeri sub formă de condiții geometrice impuse poziției sau mișcării relative a elementelor.

Relațiile care exprimă constrângerile introduse de o anumită conexiune servesc la constituirea unor ecuații care permit determinarea atâtor parametrii scalari poziționali sau de mișcare relativă a elementelor între care se introduce conexiunea câte grade de libertate are aceasta, în valoare absolută.

### 2.2.2.1 Relații între parametrii cinematici a 2 puncte ce aparțin aceluiași element (Relațiile lui Euler)

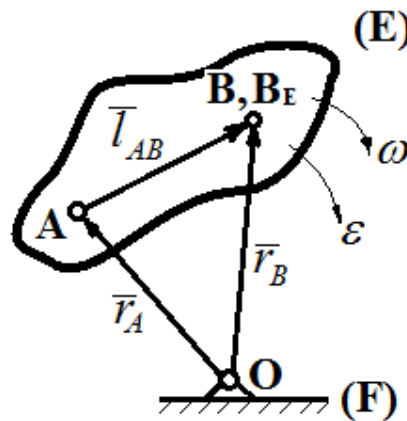


Fig. Vectorii de poziție a 2 puncte din planul mobil (E) în raport cu planul fix (F)

Punctele A și B<sub>E</sub> aparțin elementului (E) aflat în mișcare plană, iar B se deplasează pe elementul E în planul mișcării și momentan se suprapune cu B<sub>E</sub>. Punctul O este originea sistemului de referință atașat elementului fix (F).

Se exprimă poziția punctului B în funcție de poziția punctului A, față de o origine arbitrară O și de distanța dintre punctele A și B:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{l}_{AB} \quad (1)$$

aceasta reprezentând relația de legătură spațială între punctul O aparținând planului fix și punctele A și B din planul mobil.

Relația (1) se derivează în raport cu timpul pentru a obține viteza punctului B:

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{l}}_{AB} \quad (2)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{l}_{AB} + \frac{\partial \vec{l}_{AB}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{l}_{AB} + \vec{v}_{BB_E} \quad (4)$$

Relația (4) reprezintă forma generală a expresiei vitezei punctului B în funcție de punctele A și O. În cazul în care punctul B rămâne la aceeași distanță față de A (o mișcare circulară a punctului B față de A) termenul  $\bar{v}_{BB_E}$  devine zero, rezultând astfel relația

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{l}_{AB} \quad (5)$$

Pentru a obține legea de variație a accelerației punctului B, se derivează relația (1) de două ori în raport cu timpul.

$$\bar{a}_B = \ddot{\bar{r}}_B = \dot{\bar{v}}_A + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{l}_{AB}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{l}_{AB}}{\partial t}\right) \quad (6)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{l}_{AB} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{l}_{AB} + \frac{\partial \bar{l}_{AB}}{\partial t}\right) + \bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{l}_{AB}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{l}_{AB}}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A - \omega^2 \bar{l}_{AB} + \bar{\varepsilon} \times \bar{l}_{AB} + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{BB_E}) + \bar{a}_{BB_E} \quad (8)$$

La fel ca în cazul relației (3), și relația (8) reprezintă forma generalizată a expresiei accelerației punctului B în funcție de punctele A și O.

Pentru cazul unei mișcări când distanța dintre punctele A și B nu se modifică în timp, obținem relația:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A - \omega^2 \bar{l}_{AB} + \bar{\varepsilon} \times \bar{l}_{AB} \quad (9)$$

Relațiile mai sus prezentate poartă denumirea de relațiile lui Euler între parametrii cinematici ai punctelor aceluiasi element.

### 2.2.2.2 Teorema asemănării (Teorema Mehmke - Burmester)

Dacă trei puncte A,B și C aparțin aceluiasi element (Fig. 1 a) și se cunosc stările de mișcare a două dintre ele, starea de mișcare a celui de-al treilea punct se determină cu ajutorul teoremei asemănării după cum urmează:

În mișcarea plană a unei configurații nedeformabile, poligonul vitezelor (a,b,c) Fig.1b și poligonul accelerațiilor ( $\alpha,\beta,\gamma$ ) Fig.1c sunt direct asemenea cu figura în mișcare.

$$\Delta ABC \approx \Delta abc \approx \Delta \alpha\beta\gamma$$

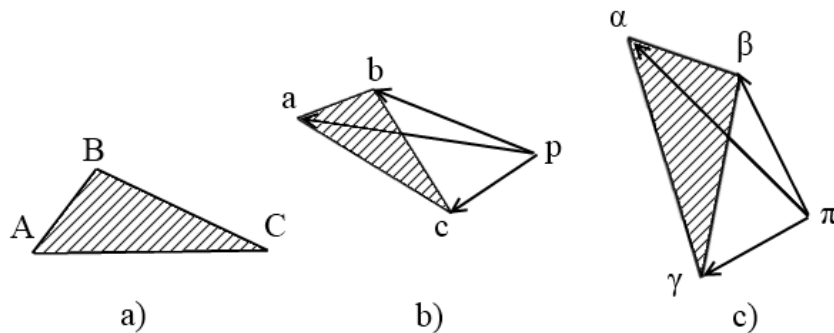


Fig.1 Teorema lui Mehmke – triunghiuri asemenea

### 2.2.2.3 Analiza cinematică a conexiunii de tip $K_A(-2)$

#### Cazul cuplei de rotație

Se consideră conexiunea  $K_A(-2)$ , o cuplă de rotație (R) interpusă între elementele (E) și (F). Prin intermediul acestei conexiuni se poate impune ca un punct A al elementului (E) să rămână tot timpul suprapus cu un punct  $A_0$  al elementului fix (F). Cu alte cuvinte, elementul (E) pivotează față de elementul fix (F) în jurul punctului comun A.

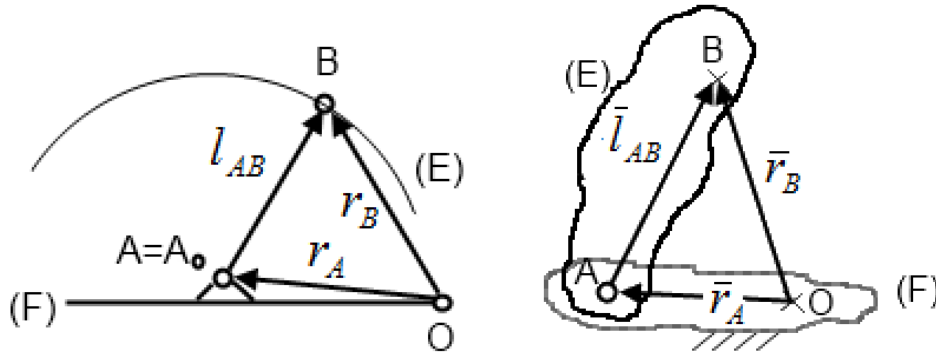


Fig. 2 Conexiunea de tip  $K_A(-2)$  materializată printr-o cuplă de rotație (R)

Condițiile de suprapunere a punctului A din elementului mobil (E) peste punctul  $A_0$  din elementul fix (F)

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= \vec{r}_{A_0} \\ \vec{v}_A &= \vec{v}_{A_0} \\ \vec{a}_A &= \vec{a}_{A_0}\end{aligned}$$

Relațiile pentru determinarea poziției, vitezei și accelerației punctului B demonstrate în capitolul “Relații între parametrii cinematici a 2 puncte ce aparțin aceluiași element”:

$$\begin{aligned}\vec{r}_B &= \vec{r}_A + \vec{l}_{AB} \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{l}_{AB} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A - \omega^2 \vec{l}_{AB} + \vec{\varepsilon} \times \vec{l}_{AB}\end{aligned}$$

#### Cazul cuplei de translație

În cazul în care punctul de pivotare  $A=A_0$  este virtual și se află la infinit, elementul mobil (E) va executa o mișcare de pivotare după o rază infinit de mare. Această mișcare de pivotare degenerază într-o mișcare de translație de-a lungul unei axe perpendiculare pe raza de pivotare. Acest tip de conexiune se notează cu T, se numește cuplă de translație și se poate materializa prin asocierea a două corpuri solide care permit doar o mișcare de translație relativă între ele după o axă numită axă de translație.

Se consideră conexiunea  $K_A(-2)$ , o cuplă de translație interpusă între elementele (E) și (F) – Fig.3. Fie punctul B aparținând elementului fix iar punctul  $B_E$  aparținând elementului mobil (E), în mișcarea relativă între cele două puncte apar relațiile:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{B_E} + k\vec{t}$$

unde  $\vec{t}$  este versorul direcției de translație

k este distanța parcursă de un element față de celălalt de-a lungul versorului  $\vec{i}$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B_E} + \vec{v}_{BB_E}$$

unde  $\vec{v}_{BB_E}$  este viteza relativă de deplasare a punctului B din elementul fix față de punctul B<sub>E</sub> din elementul mobil

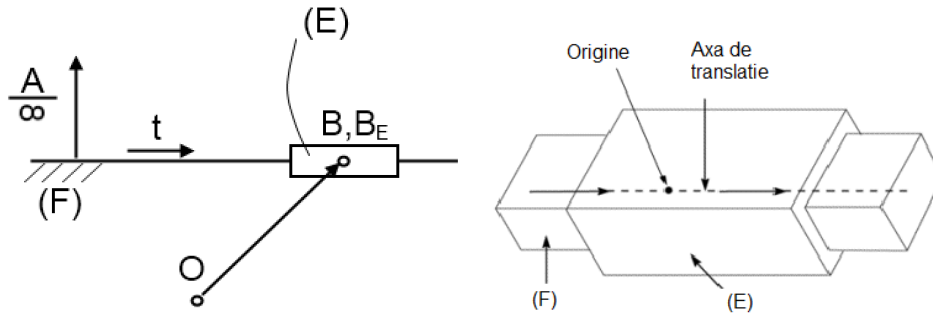


Fig.3 Conexiunea de tip K<sub>A</sub>(-2) materializată printr-o cuplă de translație (T)

Pentru determinarea accelerației punctului B se folosește următoarea relație:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B_E} + 2(\vec{\omega}_{EF} \times \vec{v}_{BB_E}) + \vec{a}_{BB_E}$$

unde  $2(\vec{\omega}_{EF} \times \vec{v}_{BB_E})$  este accelerația Coriolis (<http://www.youtube.com/watch?v=49JwbrXcPic>)

$\vec{a}_{BB_E}$  este accelerația relativă de deplasare a punctului B din elementul fix față de punctul B<sub>E</sub> din elementul mobil

#### 2.2.2.4 Analiza cinematică a conexiunii de tip K<sub>B</sub>(-1)

Conexiunea de tip K<sub>B</sub>(-1) presupune existența unui element și a două cuple cinematice de clasa a 5-a în structura sa. Se consideră punctul O legat de elementul fix, punctul A face legătura între elementele 2 - 1 și punctul B între elementele 2 - 3 așa cum este ilustrat în Fig.4. Se dorește determinarea parametrilor cinematici pentru punctul B considerând cunoscută mișcarea punctului A.

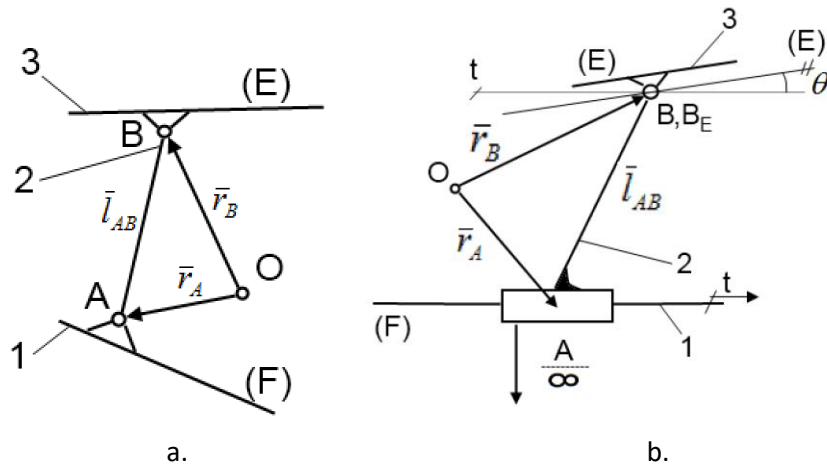


Fig.4 Conexiune de tip K<sub>B</sub>(-1) a –formată din 2 cuple de rotație  
b – formată dintr-o cuplă de rotație și o cuplă de translație



În cazul Fig.4a. se prezintă o conexiune de tip  $K_B(-1)$  cu două cuple de rotație. Pentru acest caz relațiile de transmitere a mișcării de la punctul A din elementul F la punctul B din elementul E sunt următoarele:

$$\begin{aligned}\bar{r}_B &= \bar{r}_A + \bar{l}_{AB} \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{AB} \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_A - \omega_2^2 \bar{l}_{AB} + \bar{\varepsilon}_2 \times \bar{l}_{AB}\end{aligned}$$

Dacă se înlocuiește o cuplă de rotație cu una de translație se obține tot o conexiune de tip  $K_B(-1)$ , în acest caz, relațiile cinematice fiind următoarele:

$$\begin{aligned}\bar{r}_B &= \bar{r}_{B_E} \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_{B_E} + \bar{v}_{BB_E} \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_{B_E} + 2(\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{BB_E}) + \bar{a}_{BB_E}\end{aligned}$$

Punctul B din elementul 2 execută o mișcare translație paralelă cu direcția de translație  $t$  a cuplei cinematice A. Elementul E execută o mișcare de pivotare în jurul punctului  $B_E$  față de elementul 2. Pentru a se menține legătura dintre elementele 2 și 3, punctele B și  $B_E$  trebuie să fie suprapuse. Având în vedere că ele execută mișcări de tip diferit, între ele există viteza relativă  $\bar{v}_{BB_E}$ , accelerația relativă  $\bar{a}_{BB_E}$  și accelerația Coriolis  $2(\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{BB_E})$ .

### 2.2.2.5 Analiza cinematică a conexiunii de tip $K_C(0)$ cu 2 elemente

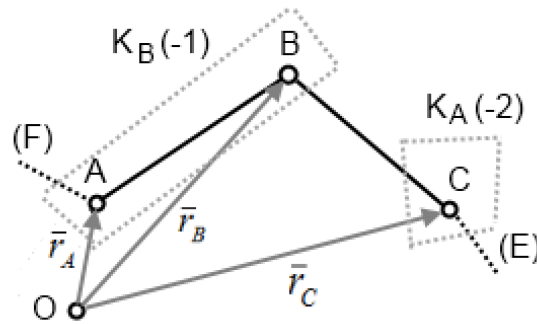


Fig 5. Conexiune  $K_C(0)$  de tip RRR

Se consideră conexiunea  $K_C(0)$  de tip RRR din Fig.5 interpusă între elementele (E) și (F). Se observă că această conexiune este alcătuită dintr-o conexiune de tip A, una de tip B și un element:

$$K_C(0) = K_B(-1) + K_A(-2) + 1\text{element}$$

În concluzie, pentru această conexiune se pot scrie următoarele relații:

$$\left. \begin{aligned}\bar{r}_B &= \bar{r}_A + \bar{l}_{AB} \\ \bar{r}_B &= \bar{r}_C + \bar{l}_{CB}\end{aligned} \right\}$$

Se cunosc  $\vec{r}_A, \vec{r}_C, \vec{l}_{AB}, \vec{l}_{CB}$  și se dorește determinarea lui  $\vec{r}_B$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{l}_{AB} \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_C + \vec{\omega}_{CB} \times \vec{l}_{CB} \end{aligned} \right\}$$

În cazul vitezelor, se cunosc  $\vec{v}_A, \vec{v}_C, \vec{l}_{AB}, \vec{l}_{CB}$  și se dorește determinarea parametrilor  $\vec{v}_B, \vec{\omega}_{AB}, \vec{\omega}_{CB}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A - \omega_{AB}^2 \vec{l}_{AB} + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{l}_{AB} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_C - \omega_{CB}^2 \vec{l}_{CB} + \vec{\varepsilon}_{CB} \times \vec{l}_{CB} \end{aligned} \right\}$$

În cazul accelerațiilor, se cunosc  $\vec{a}_A, \vec{a}_C, \vec{\omega}_{AB}, \vec{\omega}_{CB}$

și se dorește determinarea parametrilor  $\vec{a}_B, \vec{\varepsilon}_{AB}, \vec{\varepsilon}_{CB}$

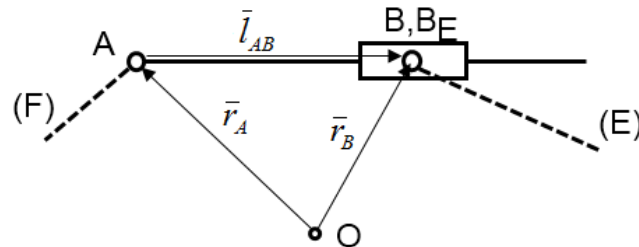


Fig 6. Conexiune  $K_C(0)$  de tip RTR

Și în cazul conexiunii  $K_C(0)$  de tip RTR prezentate în Fig.6 se poate aplica același raționament, rezultând:

$$\begin{aligned} \vec{r}_B &= \vec{r}_A + \vec{l}_{AB} + k\vec{t} \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{l}_{AB} + \vec{v}_{BB_E} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A - \omega_{AB}^2 \vec{l}_{AB} + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{l}_{AB} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{BB_E}) + \vec{a}_{BB_E} \end{aligned}$$

### 2.2.2.6 Analiza cinematică a conexiunii de tip $K_C(0)$ cu 4 elemente

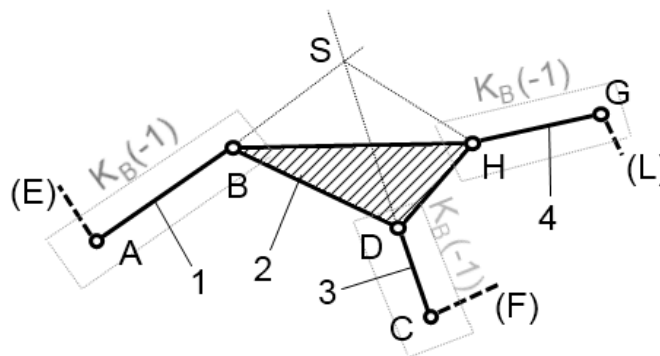


Fig. 7 Conexiune  $K_C(0)$  cu 4 elemente notată RR RR RR

Pentru conexiunea din Fig. 7 se cunosc parametrii cinematici a punctelor A, C, G și se dorește determinarea parametrilor cinematici pentru punctele B,D,H.

$$\begin{aligned}
\bar{r}_B &= \bar{r}_A + \bar{l}_{AB} \\
\bar{r}_D &= \bar{r}_C + \bar{l}_{CD} \\
\bar{r}_H &= \bar{r}_G + \bar{l}_{GH} \\
\bar{r}_H &= \bar{r}_B + \bar{l}_{BH} \\
\bar{r}_H &= \bar{r}_D + \bar{l}_{DH} \\
\bar{r}_D &= \bar{r}_B + \bar{l}_{BD}
\end{aligned}$$

Pentru a determina vitezele punctelor B,D,G, se folosește punctul intermediar S – centru instantaneu de rotație al elementului 1 în raport cu elementul 3 (acesta se obține prin prelungirea segmentelor care unesc punctele A-B și C-D respectiv)

$$\begin{aligned}
\bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \bar{l}_{AB} \\
\bar{v}_D &= \bar{v}_C + \bar{\omega}_3 \times \bar{l}_{CD} \\
\bar{v}_H &= \bar{v}_G + \bar{\omega}_4 \times \bar{l}_{GH}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{v}_S = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{BS} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \bar{l}_{AB} + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{BS} \\ \bar{v}_S = \bar{v}_D + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{DS} = \bar{v}_C + \bar{\omega}_3 \times \bar{l}_{CD} + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{DS} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{r}_H = \bar{r}_S + \bar{l}_{SH} \\ \bar{r}_H = \bar{r}_G + \bar{l}_{GH} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{v}_H = \bar{v}_S + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{SH} \\ \bar{v}_H = \bar{v}_G + \bar{\omega}_4 \times \bar{l}_{GH} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \bar{l}_{AB} \\ \bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{\omega}_3 \times \bar{l}_{CD} \\ \bar{v}_H = \bar{v}_G + \bar{\omega}_4 \times \bar{l}_{GH} \\ \bar{v}_S = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{BS} \\ \bar{v}_S = \bar{v}_D + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{DS} \\ \bar{v}_H = \bar{v}_S + \bar{\omega}_2 \times \bar{l}_{SH} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A - \omega_1^2 \bar{l}_{AB} + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{l}_{AB} \\ \bar{a}_D = \bar{a}_C - \omega_3^2 \bar{l}_{CD} + \bar{\varepsilon}_3 \times \bar{l}_{CD} \\ \bar{a}_H = \bar{a}_G - \omega_4^2 \bar{l}_{GH} + \bar{\varepsilon}_4 \times \bar{l}_{GH} \\ \bar{a}_S = \bar{a}_B - \omega_2^2 \bar{l}_{BS} + \bar{\varepsilon}_2 \times \bar{l}_{BS} \\ \bar{a}_S = \bar{a}_D - \omega_2^2 \bar{l}_{DS} + \bar{\varepsilon}_2 \times \bar{l}_{DS} \\ \bar{a}_H = \bar{a}_S - \omega_2^2 \bar{l}_{SH} + \bar{\varepsilon}_2 \times \bar{l}_{SH} \end{cases}$$

Vitezele  $\bar{v}_A, \bar{v}_C, \bar{v}_G$  sunt cunoscute și ca urmare se pot determina cele 8 componente scalare ale vitezelor punctelor B,D,H,S și cele 4 viteze unghiulare corespunzătoare. De asemenea,  $\bar{a}_A, \bar{a}_C, \bar{a}_G$  sunt cunoscute și se pot determina cele 8 componente scalare ale accelerației punctelor B,D,H,S și a celor 4 accelerații unghiulare a elementelor respective.

### 2.2.2.7 Analiza cinematică a conexiunii de tip $K_A(-1)$

Se consideră conexiunea  $K_A(-1)$  din Fig. 8, interpusă între elementele 1 și 2. Zona de contact instantaneu A a conexiunii este constituită din perechea de curbe, reciproc înfășurate ( $C_1$ ) și ( $C_2$ ). Se

notează cu  $K_1$  și  $K_2$  centrele de curbură ale curbelor  $(C_1)$  și  $(C_2)$  iar cu  $\rho_1$  și  $\rho_2$  vectorii având direcția și modulul razelor de curbură ale aceluiași curbe fiind pe direcția normalei comune de contact n-n.

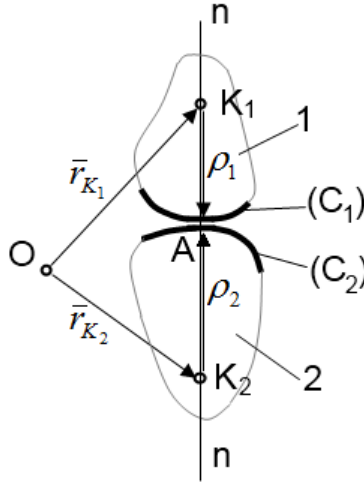


Fig. 8 Conexiune  $K_A(-1)$

Dacă  $\vec{r}_{K_1}$  și  $\vec{r}_{K_2}$  sunt vectorii de poziție ai punctelor  $K_1$  și  $K_2$  în raport cu punctul O legat de elementul fix, rezultă:

$$\vec{r}_{K_2} = \vec{r}_{K_1} + (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) \quad (1)$$

În general profilele elementelor 1 și 2 nu sunt cercuri, ca urmare, în timpul mișcării, razele de curbură a celor două profile se modifică și ele, deci sunt variabile cu timpul. Derivând relația (1) se obține:

$$\vec{v}_{K_2} = \dot{\vec{r}}_{K_2} = \dot{\vec{r}}_{K_1} + \bar{\omega}_{12} \times (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) + \frac{\partial(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)}{\partial t} \quad (2)$$

unde  $\bar{\omega}_{12}$  este viteza unghiulară de schimbare a direcției normalei de contact n-n.

Derivând relația (2) în raport cu timpul se obține:

$$\vec{a}_{K_2} = \ddot{\vec{r}}_{K_2} = \ddot{\vec{r}}_{K_1} - \omega_{12}^2 (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) + \bar{\varepsilon}_{12} \times (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) + 2\bar{\omega}_{12} \times \frac{\partial(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)}{\partial t} + \frac{\partial^2(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)}{\partial t^2} \quad (3)$$

unde  $\bar{\varepsilon}_{12}$  este accelerația unghiulară de schimbare a direcției normalei de contact n-n, iar

$\frac{\partial(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)}{\partial t}$  și  $\frac{\partial^2(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)}{\partial t^2}$  se referă la schimbarea în timp a distanței dintre punctele  $K_1$  și  $K_2$

Dar,

$$\frac{\partial(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)}{\partial t} = \dot{\bar{\rho}}_1 - \dot{\bar{\rho}}_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)}{\partial t^2} = \ddot{\bar{\rho}}_1 - \ddot{\bar{\rho}}_2 = 0$$

deoarece derivatele de ordinul 1 și 2 a razei de curbură a unei curbe sunt nule.  
În concluzie, relațiile (2) și (3) au următoarea formă:

$$\bar{v}_{K_2} = \dot{\bar{r}}_{K_2} = \dot{\bar{r}}_{K_1} + \bar{\omega}_{12} \times (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) \quad (4)$$

$$\bar{a}_{K_2} = \ddot{\bar{r}}_{K_2} = \ddot{\bar{r}}_{K_1} - \omega_{12}^2 (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) + \bar{\varepsilon}_{12} \times (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) \quad (5)$$

Dacă se analizează relațiile pentru poziție, viteză și accelerație în cazul conexiunilor  $K_A(-1)$  și  $K_B(-1)$  se observă că ele sunt echivalente. Astfel o conexiune de tip  $K_A(-1)$  poate fi înlocuită cu o conexiune de tip  $K_B(-1)$  printr-o transformare instantaneu izocinetică.